Lycée La Martinière Monplaisir - MPS1
Année 2007-2008

Colle de Maths - Semaine 19

Espaces vectoriels. Applications linéaires.

Cours :	**Commentaires :**	**Cours :**	**Commentaires :**	**Cours :**	**Commentaires :**
Images directes et réciproques de sev par une application linéaire.		Structure d'anneau de $\mathcal{L}(E)$. (Si on l'utilise, on prouvera la linéarité de $u \mapsto v \circ u$ et $v \mapsto v \circ u$.)		Montrer par 3 méthodes que $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ,\ x+y-2z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.	
Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\varphi^2 - 5\varphi + 6Id_E = 0$ Montrer que $E = \mathrm{Ker}(\varphi - 2Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi - 3Id_E)$		**Exercice 1 :** Soient F et G deux sev de $\mathbb{R}^3$ définis par : $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x - 4y + 3z = 0\}$ $G = Vect(1,0,-1)$ Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.		**Exercice 1 :** Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\varphi^2 - 2\varphi - 8Id_E = 0$ Montrer que $E = \mathrm{Ker}(\varphi + 2Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi - 4Id_E)$	
Exercice 2 : Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\begin{cases} g \circ f \circ g = g \\ f \circ g \circ f = f \end{cases}$ 1. Montrer que $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} g$ 2. Montrer que $f(\mathrm{Im} g) = \mathrm{Im} f$.		**Exercice 2 :** Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que 1. $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker} f = \{0\}$ $\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$. 2. $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker} f = \{0\}$ $\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.		**Exercice 2 :** Soient trois $\mathbb{K}$-ev E, F, G. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$ $\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$ $\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(g) + \mathrm{Im}(f) = F$	
Exercice 3 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soient p, q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p$. 1. Montrer que $p \circ q$ projecteur. 2. Montrer que $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$ $\mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$		**Exercice 3 :** Soit E un $\mathbb{K}$-ev et p, q deux projecteurs de E. Montrer que $p + q$ projecteur $\Leftrightarrow$ $p \circ q = q \circ p = 0$		**Exercice 3 :** Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que sont équivalents : 1. $f \circ g = g$ et $g \circ f = f$ 2. f, g sont des projecteurs et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$	