Lycée La Martinière Monplaisir - MPS1
Année 2007-2008

Colle de Maths - Semaine 20

Applications linéaires. Polynômes. Racines des polynômes.

Cours : Tout sur les projecteurs.	**Commentaires :**	**Cours :** a racine de $P \Leftrightarrow (X-a) \mid P$	**Commentaires :**	**Cours :** Décomposition d'un polynôme en produit d'irréductibles.	**Commentaires :**
Exercice 1 : Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $$\left\{ \begin{array}{l} g \circ f \circ g = g \\ f \circ g \circ f = f \end{array} \right.$$ 1. Montrer que $$E = \text{Im} f \oplus \text{Ker} g$$ 2. Montrer que $f(\text{Im} g) = \text{Im} f$.		**Exercice 1 :** Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soient p, q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p$. 1. Montrer que $p \circ q$ projecteur. 2. Montrer que $$\text{Im}(p \circ q) = \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$$ $$\text{Ker}(p \circ q) = \text{Ker}(p) + \text{Ker}(q)$$		**Exercice 1 :** Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que sont équivalents : 1. $f \circ g = g$ et $g \circ f = f$ 2. f, g sont des projecteurs et $\text{Im}(f) = \text{Im}(g)$	
Exercice 2 : Quel est le reste de la division euclidienne de $(cos\alpha + X sin\alpha)^n$ par $X^2 + 1$?		**Exercice 2 :** Soit P polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients réels. On suppose que P admet n racines réelles distinctes. Montrer que les racines de $P^2 + 1$ sont toutes simples dans $\mathbb{C}$.		**Exercice 2 :** Déterminer les valeurs de $n \in N$ telles que le polynôme $X^2 + X + 1$ divise le polynôme $X^{2n} + X^n + 1$.	
Exercice 3 : Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $$\forall n \in \mathbb{N}, \int_n^{n+1} \widetilde{P}(t) dt = n + 1$$		**Exercice 3 :** Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $$P(X+1) = P(X)$$		**Exercice 3 :** Déterminer dans $\mathbb{K}[X]$ tous les polynômes divisibles par leur polynôme dérivé.	