Lycée La Martinière Monplaisir - MPS1
Année 2007-2008

Colle de Maths - Semaine 21

Racines des polynômes. Espaces vectoriels de dimension finie.

Cours : Les 7 propriétés capitales des espaces vectoriels de dimension finie.	**Commentaires :**	**Cours :** Relations coefficients-racines.	**Commentaires :**	**Cours :** Décomposition de Gauss de $X^n - 1$.	**Commentaires :**
Exercice 1 : Montrer que la famille $(Id, \ln, \exp)$ est libre dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{*+}, \mathbb{R})$.		**Exercice 1 :** Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer que les trois applications $x \mapsto \sin(x+a)$, $x \mapsto \sin(x+b)$, $x \mapsto \sin(x+c)$ forment une famille liée dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.		**Exercice 1 :** Montrer que la famille $$(x \mapsto e^{kx})_{k=1\dots n}$$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.	
Exercice 2 : Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les $$P_k = (X-\alpha)^k (X-\beta)^{n-k}$$ $(k = 1 \dots n)$ forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$.		**Exercice 2 :** $$F = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}\right)$$ $$G = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$ Déterminer la dimension de F, G, $F \cap G$ et $F + G$.		**Exercice 2 :** Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On pose : $$F = Vect(X(X-1), X)$$ $$G = Vect(X^2 + 4)$$ Montrer que $E = F \oplus G$.	
Exercice 3 : Résoudre le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$: $$\begin{cases} x + y + z &= 3 \\ xy + yz + xz &= 2 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 9 \end{cases}$$		**Exercice 3 :** Soit $P = X^3 + pX + q$ avec $p, q \in \mathbb{C}$. Donnr une condition nécessaire et suffisante sur (p, q) pour que P admette 3 racines $x, y, z \in \mathbb{C}$ telles que $$x^4 + y^4 + z^4 = -1$$		**Exercice 3 :** Soit P polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients réels. On suppose que P admet n racines réelles distinctes. Montrer que les racines de $P^2 + 1$ (dans $\mathbb{C}$) ne peuvent pas être racines de $(P^2 + 1)'$.	