Colle de Maths - Semaine 22

Applications linéaires en dimension finie. Matrices.

Cours : Théorème du rang.	**Commentaires :**	**Cours :** Images de familles libres, liées, génératrices par une application linéaire en dimension finie.	**Commentaires :**	**Cours :** Synthèse : Tout sur les supplémentaires.	**Commentaires :**
Exercice 1 : Soient E,F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,E)$ tels que $f \circ g \circ f = f \quad \text{et} \quad g \circ f \circ g = g$ Montrer que $E = Im(g) \oplus Ker(f)$. Comparer $rg(f)$ et $rg(g)$.		**Exercice 1 :** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que sont équivalents : (i) $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$ (ii) $Ker(f) + Im(f) = E$ (iii) $Ker(f) \oplus Im(f) = E$ (iv) $Ker(f) = Ker(f^2)$ (v) $Im(f) = Im(f^2)$		**Exercice 1 :** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = 0$ et $f + g$ bijectif. Montrer que $rg(f) + rg(g) = n$.	
Exercice 2 : $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Calculer $(A - I_3)^2(A - 2I_3)$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.		**Exercice 2 :** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ Calculer $A^2 - 4A + 3I_3$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.		**Exercice 2 :** $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ Calculer $(A - I_3)(A + 3I_3)$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.	
Exercice 3 : Dans $E = R_3[X]$, on considère $\varphi : P \mapsto (X^2 - 1)P'' + 2XP'$ Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de E. En déduire $Ker(\varphi)$ et $Im(\varphi)$.		**Exercice 3 :** Soit $f : R^4 \to R^3$ de matrice dans les bases canoniques : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ Déterminer $Im(f)$ et $Ker(f)$. Déterminer l'image réciproque par f du plan d'équation $x + y + z = 0$		**Exercice 3 :** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 1. Calculer A^2. Qu'en déduire sur f ? 2. Déterminer une base de $Im(f)$ et $Ker(f)$. 3. Ecrire matrice de f dans une base adaptée à $Im(f) \oplus Ker(f)$.	