Colle de Maths - Semaine 25

Déterminants. Fractions rationnelles.

Cours :

Méthodes pour montrer qu'une matrice est inversible.

Commentaires :

Exercice 1 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$. Calculer :

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & & & (0) \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 2 :

Décomposer en éléments simples de $\mathbb{R}(X)$:

$$F(X) = \frac{X^2}{(X-1)(X^2+4)(X^2+1)^2}$$

Exercice 3 :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $f - \lambda Id$ ne soit pas inversible.
2. Pour chaque λ de la question précédente, déterminer une base de $\ker(f - \lambda Id)$.
3. En déduire une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.
4. Calculer A^n pour tout $n \geq 1$.

Cours :

Partie polaire du pôle simple d'une fraction rationnelle.

Commentaires :

Exercice 1 :

Pour a et b réels, calculer :

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & \cdots & b \\ a & a+b & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 2 :

Décomposer en éléments simples de $\mathbb{R}(X)$:

$$F(X) = \frac{X^2}{(X-2)(X^2+1)(X^2+4)^2}$$

Exercice 3 :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $f - \lambda Id$ ne soit pas inversible.
2. Pour chaque λ de la question précédente, déterminer une base de $\ker(f - \lambda Id)$.
3. En déduire une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.
4. Calculer A^n pour tout $n \geq 1$.