Colle de Maths - Semaine 28

Espaces vectoriels euclidiens.

Cours : $DL(0)$ de $\ln(1-x)$ (sans preuve) Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité.	**Commentaires :**	**Cours :** $DL(0)$ de Arctan$x$ (sans preuve) Formes linéaires et produit scalaire.	**Commentaires :**	**Cours :** Obtention du $DL(0)$ de Arcsin$x$.	**Commentaires :**
Exercice 1 : Soit $E=\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice dans la base canonique de E de la projection orthogonale sur le plan P d'équation $$x-2y+z=0$$ Soit $u=(1,2,3)$. Déterminer l'image de u par la symétrie orthogonale par rapport à $P^{\perp}$.		**Exercice 1 :** Soit $E=\mathbb{R}^4$ et $$F=\left\{X, \left\vert \begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{array}\right.\right\}$$ Déterminer une b.o.n. de $F^{\perp}$. Ecrire la matrice dans la base canonique de E de la projection orthogonale sur F. Calculer $d(u,F)$ où $u=(1,2,3,4)$.		**Exercice 1 :** Soit $E=\mathbb{R}_2[X]$ et $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$, $$\varphi(P,Q)=\sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k)$$ 1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E. 2. Déterminer une base orthonormale de $F=\{P\in E \ / \ P(0)=0\}$ relativement à ce produit scalaire. 3. Déterminer une base de $F^{\perp}$.	
Exercice 2 : Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que $$\forall x\in E, < f(x)\vert x >= 0$$ Montrer que $\mathrm{Ker}(f)=(\mathrm{Im}(f))^{\perp}$.		**Exercice 2 :** Soit p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $$\forall x,y\in E, < p(x)\vert y >=< x\vert p(y) >$$		**Exercice 2 :** Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que pour tous $x,y\in E$, $$< f(x)\vert y >=< x\vert f(y) >$$ Montrer que $\mathrm{Ker}(f)=(\mathrm{Im}(f))^{\perp}$.	
Exercice 3 : Etudier les branches infinies de la fonction $$x\mapsto x\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{x-1}$$		**Exercice 3 :** Déterminer un développement asymptotique en $+\infty$ avec reste en $o\left(\frac{1}{x}\right)$ de $$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$$		**Exercice 3 :** Déterminer les branches infinies de la fonction $$x\mapsto\sqrt[3]{x^2(x-2)}$$	