Colle de Maths - Semaine 29

Transformations du plan et de l'espace. Révisions.

Exercice 1 : Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie dans un repère orthonormé par : $\begin{cases} x' = 1/3(2x - y + 2z - 1) \\ y' = 1/3(2x + 2y - z - 1) \\ z' = 1/3(-x + 2y + 2z + 2) \end{cases}$	**Commentaires :**	**Exercice 1 :** Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie dans un repère orthonormé par : $\begin{cases} x' = 1/3(-2x - y + 2z + 3) \\ y' = 1/3(2x - 2y + z + 3) \\ z' = 1/3(x + 2y + 2z + 9) \end{cases}$	**Commentaires :**	**Exercice 1 :** Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie dans un repère orthonormé par : $\begin{cases} x' = 1/3(-2x - 2y + z + 1) \\ y' = 1/3(-2x + y - 2z + 2) \\ z' = 1/3(x - 2y - 2z + 1) \end{cases}$	**Commentaires :**
Exercice 2 : Soit E un espace euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, < f(x) \mid x >= 0$ Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$.		**Exercice 2 :** Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dim.finie. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,E)$ tels que $\begin{cases} f \circ g \circ f = f \\ g \circ f \circ g = g \end{cases}$ Montrer que $E = \mathrm{Im}(g) \oplus \mathrm{Ker}(f)$. Montrer que $rg(f) = rg(g)$.		**Exercice 2 :** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un endomorphisme f tel que $\mathrm{Im}f = \mathrm{Ker}f$ si et seulement si n est pair.	
Exercice 3 : Déterminer $\lim_{n\infty} \left(\frac{\mathrm{Arctan}(n)}{\mathrm{Arctan}(n+1)} \right)^{n^2}$		**Exercice 3 :** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Soient $p, q \in \mathbb{R}^+$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $pf(a) + qf(b) = (p+q)f(c)$		**Exercice 3 :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que f admet un et un seul point fixe sur $\mathbb{R}$.	
Exercice 4 : Soit f une application affine de $\mathbb{R}^3$ et A un point fixé de l'espace. Montrer qu'il existe un unique couple $(\overrightarrow{u}, g)$ tel que $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g$ où u est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et g est une application affine telle que $g(A) = A$.		**Exercice 4 :** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par $\begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = x - 1 \end{cases}$ Déterminer l'image par $f$du cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(0,1)$ et de rayon 1.		**Exercice 4 :** Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier de l'espace. Déterminer la transformation de $\mathbb{R}^3$ définie par $f = s_{(AB)} \circ s_{(AC)} \circ s_{(AD)}$ où s_{Δ} désigne la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ.	