Colle de Maths - Semaine 30

Fonctions de deux variables

Exercice 1 : $f(x,y)=\begin{cases} x^2y^2\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ Etudier la continuité de f, et l'existence et continuité des dérivées partielles de f.	**Commentaires :**	**Exercice 1 :** $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ Etudier la continuité de f, et l'existence et continuité des dérivées partielles de f.	**Commentaires :**	**Exercice 1 :** $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x\sin y-y\sin x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ Etudier la continuité de f, et l'existence et continuité des dérivées partielles de f.	**Commentaires :**
Exercice 2 : Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par : $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;/\; \begin{array}{l} x\geq 0\\ y\geq 0\\ y\leq x\\ x^2+y^2\leq 1\end{array}\right\}$ Calculer $\displaystyle\iint_D xy\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$		**Exercice 2 :** Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par : $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;/\; \begin{array}{l} x\geq 0\\ y\geq 0\\ y\leq x\\ 1\leq x^2+y^2\leq 4\end{array}\right\}$ Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy$		**Exercice 2 :** Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par : $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;/\; \begin{array}{l} x\geq 0\\ y\geq 0\\ 1\leq x^2+y^2\leq 2\end{array}\right\}$ Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{x^2+y^2}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$	
Exercice 3 : Trouver toutes les applications $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telles que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2+xy$ On pourra utiliser le changement de variable : $x=u+v,\ y=u-v$		**Exercice 3 :** Trouver toutes les applications $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ On pourra utiliser par exemple des coordonnées polaires.		**Exercice 3 :** Trouver toutes les applications $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telles que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f(x,y)$ On pourra utiliser le changement de variable : $u=x+y,\ v=x-y$	