Lycée Edouard Branly - TSI2
Année 2007-2008

Colle de Maths - Semaine 1

Révisions d'algèbre de sup

Cours :

Commentaires :

Enoncer clairement le théorème de division euclidienne entre deux polynômes A et B.
Donner les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ et de $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 1 :

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. Calculer et factoriser le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

Exercice 2 :

On note $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On pose

$$\varphi_{A,B} : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ M & \mapsto & AM - MB \end{array}$$

1. Montrer que $\varphi_{A,B} \in \mathcal{L}(E)$.
2. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Construire la matrice qui représente $\varphi_{A,B}$ dans la base canonique de E. Montrer que cette matrice est inversible et en déduire l'ensemble

$$V_{A,B} = \{M \in E \ / \ AM = MB\}$$

3. On pose pour $r, s \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $r \neq s$,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}, \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in E$. Donner une CNS sur x, y, z, t pour que $M \in V_{D,\Delta}$. En déduire une base de $V_{D,\Delta}$.

Cours :

Commentaires :

Enoncer clairement la formule du binôme de Newton pour deux nombres complexes, puis pour deux matrices.
Développer $a^n - b^n$.

Exercice 1 :

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$$

Exercice 2 :

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. En calculant $A^2 - 3A + 2I$, montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$A^{n+2} - 2A^{n+1} = A^{n+1} - 2A^n$$

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$A^{n+2} = 2A^{n+1} + A - 2I$$

4. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, B_n = A^n + A - 2I$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_{n+2} = 2B_{n+1}$.
5. Calculer B_n en fonction de B_0 et n. En déduire A^n en fonction de A et de n.

Cours :

Commentaires :

Définition d'une famille libre de vecteurs d'un espace vectoriel.
Enoncer clairement le Théorème de la Base Incomplète.

Exercice 1 :

Donner l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

On définit les fonctions $T_n, n \in \mathbb{N}$, par

$$\forall x \in [-1, 1],\ T_n(x) = \cos(n\text{Arccos}x)$$

1. Montrer la relation : $\forall n \geq 1$,

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

2. Montrer que $T_n \in \mathbb{R}[X]$ et $d^\circ(T_n) = n$.
3. Montrer que $(T_0, \ldots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$
4. Montrer que T_n possède exactement n racines distinctes dans $]-1, 1[$, que l'on exprimera.