Colle de Maths - Semaine 2

Compléments d'algèbre linéaire

Cours : Expliquer le développement d'un déterminant par rapport à une rangée.	**Commentaires :**	**Cours :** Trace d'une matrice carrée. Définition et propriétés.	**Commentaires :**	**Cours :** Définition du déterminant de n vecteurs dans une base de E de dimension n.	**Commentaires :**
Exercice 1 : Calculer le déterminant D_n de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$, $$a_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si } i=j \\ 1 & \text{si } \lvert j-i\rvert = 1 \\ 0 & \text{si } \lvert j-i\rvert > 1 \end{cases}$$		**Exercice 1 :** On note $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ où $a,b,c \in \mathbb{C}$ et $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ 1. Calculer $\det(\Omega)$, en déduire que Ω inversible. 2. Déterminer D matrice diagonale telle que $M\Omega = D\Omega$. En déduire $\det(M)$.		**Exercice 1 :** On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par $$u_0 = 0,\ u_1 = 1, \text{et}$$ $$\forall n \geq 0, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 2$$ Exprimer u_n en fonction de n.	
Exercice 2 : Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe un unique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que pour tout $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, on ait $$\varphi(X) = tr(AX)$$		**Exercice 2 :** Calculer le déterminant D_n de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$, $$a_{i,j} = \lvert i-j\rvert$$		**Exercice 2 :** Soit f l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même définie par $$f(M) = \frac{1}{3}(2M +^t M)$$ Calculer le déterminant de f.	