Colle de Maths - Semaine 3

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Cours :

Commentaires :

Définition d'un endomorphisme diagonalisable/trigonalisable et d'une matrice diagonalisable/trigonalisable. Différentes caractérisations.

Exercice 1 :

Calculer les puissances de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

La matrice $A = \begin{pmatrix} 13 & -9 & 45 \\ -3 & 3 & -11 \\ -3 & 2 & 10 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?
Trouver P inversible et $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.
On se propose de résoudre l'équation (E) : $B^2 = A$ d'inconnue $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifient $f \circ g = g \circ f$. Montrer que le noyau de l'un est stable par l'autre, ainsi que ses sous-espaces propres éventuels.

2. Soit B telle que $B^2 = A$. On note f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés à A et B respectivement. On note $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ la base de trigonalisation de A précédente. Montrer que $M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & * \\ 0 & \mu & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Vérifier que $Vect(u_2, u_3) = \ker(f - Id)^2$ en déduire que $Vect(u_2, u_3)$ stable par g puis $M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. En déduire $M_{\mathcal{B}}(g)$ puis les solutions de (E).

Cours :

Commentaires :

Définitions de valeur propre, vecteur propre, sous-espaces propres.
Polynôme caractéristique : définition et propriétés.

Exercice 1 :

Soient (u_n),(v_n),(w_n), les suites réelles définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 22$, $w_0 = 22$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \dfrac{1}{4}(2u_n + v_n + w_n) \\ v_{n+1} &= \dfrac{1}{3}(u_n + v_n + w_n) \\ w_{n+1} &= \dfrac{1}{4}(u_n + v_n + 2w_n) \end{cases}$$

Calculer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 2 :

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et f définie sur E par :

$$f(P)(X) = (1+X^2)P''(X) - 2XP'(X)$$

Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$. Calculer les valeurs propres de f. f est-elle diagonalisable ?

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f définie sur $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $f(X) = AX$.
Montrer que f est linéaire, trouver Ker$f$, Imf et préciser leur dimension. Donner les éléments propres de f.

Cours :

Commentaires :

Démonstration : Si m_λ représente l'ordre de multiplicité d'une valeur propre λ, alors :

$$\ldots 1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$$

Exercice 1 :

Calculer les puissances de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

1. On considère la matrice M définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Déterminer les valeurs propres complexes de M et les sous-espaces propres associés.
M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

2. La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?