Colle de Maths - Semaine 4

Espaces préhilbertiens réels

Cours : **Commentaires :**

Inégalité de Cauchy-Schwarz avec cas d'égalité. (avec démonstration)

Exercice 1 :

Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour que

$$\int_0^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt$$

soit minimale.

Exercice 2 :

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de

$$(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt,$$

Soient S et $T \in \mathcal{L}(E)$:

$$T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt,\ S(f)(x) = \int_x^1 f(t)dt$$

1) $\forall f, g \in E, (T(f)|g) = (f|S(g))$.
2) $\forall f \in E$, $h = S \circ T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $h(1) = 0$ et $h'(0) = 0$.
3) Eléments propres de $S \circ T$ et montrer que les sep sont 2 à 2 orthogonaux.
4) Soit F le sous-espace de E engendré par les vecteurs propres de $S \circ T$. Montrer que :

$$\forall t \in F, \quad \|T(f)\| \leq \frac{2}{\pi}\|f\|$$

Cours : **Commentaires :**

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Exercice 1 :

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ \left\{ \begin{array}{l} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{array} \right. \right\}$$

Former la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F.

Exercice 2 :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X]^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto & \displaystyle\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\sqrt{1 - t^2}dt \end{array}$$

1) φ est un produit scalaire.
2) Montrer que $\exists!(Q_n)_{n \in N} \in \mathbb{R}[X]$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in \mathbb{R}$,

$$\sin((1 + 1)u) = \sin u Q_n(\cos u)$$

Donner le degré et le coefficient dominant de Q_n.
3) Montrer que les Q_n sont 2 à 2 orthogonaux.
4) Calculer le minimum de

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & \displaystyle\int_{-1}^1 (t^3 + xt^2 + yt + z)^2 \sqrt{1 - t^2}dt \end{array}$$

Cours : **Commentaires :**

Projection orthogonale sur un sev de dim finie.
Distance à un sev de dimen finie.

Exercice 1 :

Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour que

$$\int_0^1 (ax^3 + bx^2 + cx + 1)^2 dx$$

soit minimale.

Exercice 2 :

$E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tous $A, B \in E$,

$$\varphi(A, B) = tr\left({}^t AB\right)$$

1) Montrer que φ p.s. sur E.
2) Montrer que

$$\forall A \in E, tr(A) \leq \sqrt{n\, tr({}^t AA)}$$

(Cas d'égalité ?)
3) Montrer que

$$\forall A, B \in E, \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

(Cas d'égalité ?)
4) Montrer que $E = \mathcal{S}_n(A) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
5) Pour $A = (a_{i,j})_{i,j} \in E$, montrer que

$$\inf_{S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{i,j} - s_{i,j})^2 = \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{i,j} - a_{j,i})^2$$