Lycée Edouard Branly - TSI2
Année 2007-2008

# Colle de Maths - Semaine 5

Espaces euclidiens

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr>
<td>Cours : Commentaires :<br><br>Caractérisation des formes bilinéaires symétriques.</td>
<td>Cours : Commentaires :<br><br>Forme quadratique : définition, caractérisation matricielle et diagonalisation.</td>
<td>Cours : Commentaires :<br><br>Formule de changement de base pour les formes bilinéaires.</td>
</tr>
<tr>
<td>Exercice 1 :<br><br>Reconnaître la transformation de $\mathbb{R}^3$ définie matriciellement relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par<br><br>$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$</td>
<td>Exercice 1 :<br><br>Soient $r$ et $s$ les transformations de $\mathbb{R}^3$ définies dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par<br><br>$$R = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$<br><br>$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$<br><br>Préciser la nature et les éléments remarquables de $r$, $s$, $r \circ s$ et $s \circ r$.</td>
<td>Exercice 1 :<br><br>Reconnaître la transformation de $\mathbb{R}^3$ définie matriciellement relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par<br><br>$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 4 & 8 & 1 \\ 4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Exercice 2 :<br><br>1) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.<br><br>2) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^tBB = I_n$. Calculer $B$.<br><br>3) Soit $A$ diagonalisable tel que tous ses sous-espaces propres soient orthogonaux. $A$ est-elle symétrique ?</td>
<td>Exercice 2 :<br><br>Soit $f$ un endomorphisme symétrique de $E$ vérifiant :<br><br>$$\forall x \in E,\ (f(x)|x) = 0$$<br><br>Déterminer $f$.</td>
<td>Exercice 2 :<br><br>Soit $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire :<br><br>$$\forall (X,Y) \in E^2,\ (X|Y) = tr({}^tXY)$$<br><br>Soit $A$ fixée dans $E$, et<br><br>$$\varphi_A : X \mapsto A^tXA$$<br><br>Montrer que $\varphi_A$ est un endomorphisme symétrique de $E$.</td>
</tr>
</table>