Colle de Maths - Semaine 11

Séries entières, Séries de Fourier

Cours : Théorème de Dirichlet et cas particulier où f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue.	**Commentaires :**	**Cours :** Coefficients de Fourier d'une fonction continue par morceaux T-périodique. Série de Fourier de f, sommes partielles.	**Commentaires :**	**Cours :** Théorème de Parseval et interprétation géométrique dans le cas des fonctions continues.	**Commentaires :**
Exercice 1 : Développer en série de Fourier sur $\mathbb{R}$ la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, paire, telle que $\forall t \in [0, \pi],\ f(t) = t$ En déduire les sommes $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$		**Exercice 1 :** Développer en série de Fourier sur $\mathbb{R}$ la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, impaire, telle que $\begin{cases} \forall t \in]0, \pi[,\ f(t) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{Z},\ f(n\pi) = 0 \end{cases}$ En déduire les sommes $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)} \quad , \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$		**Exercice 1 :** Développer en série de Fourier sur $\mathbb{R}$ la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, impaire, telle que $\forall t \in [0, \pi],\ f(t) = t(\pi - t)$ En déduire les sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$	
Exercice 2 : Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$		**Exercice 2 :** Donner un DSE autour de 0 de $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$		**Exercice 2 :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et 2π-périodique. Montrer que si tous les coefficients de Fourier de f sont nuls, alors f est la fonction nulle.	