Colle de Maths - Semaine 14

Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$: continuité et calcul différentiel.

Cours : Théorème de composition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.	**Commentaires :**	**Cours :** Différentielle en un point d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.	**Commentaires :**	**Cours :** Différentiation d'une réciproque.	**Commentaires :**
Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $f(x,y,z) = \left(x+y, \dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}\right)$ 1. Sur quel ouvert U de $\mathbb{R}^3$ f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$? 2. Déterminer la matrice jacobienne de f en tout point de U ainsi que le jacobien de f. 3. On note $V = U \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y > 0\}$ Montrer que f réalise un changement de variables de V sur un ouvert à préciser.		**Exercice 1 :** $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x > y\}$ $\varphi : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (u,v) = (xy, x+y) \end{array}$ 1. Montrer que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur un ouvert V que l'on précisera. 2. Vérifier que l'application $F = f \circ \varphi^{-1}$ définie sur V vérifie l'équation $\dfrac{\partial F}{\partial u} + 3F = 0$ 3. En déduire les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ qui sont solutions de $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} + 3(x-y)f = 0$		**Exercice 1 :** Soit k dans $]0,1[$, p dans $\mathbb{N}^*$ et f dans $\mathcal{C}^p(R,R)$ tels que $\forall x \in R, \|f'(x)\| < k$ On définit l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par : $\varphi(x,y) = (x + f(x); x + f(y))$ 1. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}^2$. 2. Calculer le jacobien de φ. 3. Montrer que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.	
Exercice 2 : Trouver les applications $f : \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solution de l'équation aux dérivées partielles : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}$		**Exercice 2 :** Trouver les applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ solutions de l'équation $x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y} = f$ à l'aide du changement de variable $\left\{ \begin{array}{l} u = x \\ v = xy \end{array} \right.$		**Exercice 2 :** $\varphi : (u,v) \mapsto \left(ue^v, e^{-v}\right)$ $\Omega = \mathbb{R} \times]0,+\infty[$ 1. Justifier que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur Ω. 2. Déterminer les solutions dans $\mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ de $x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$	