Colle de Maths - Semaine 15

Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$: continuité et calcul différentiel.

Cours : Théorème de Schwarz	**Commentaires :**	**Cours :** Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour les fonctions de deux variables.	**Commentaires :**	**Cours :** Notations de Monge. Conditions suffisantes d'extremum.	**Commentaires :**
Exercice 1 : Etudier les extrema de la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2y^2(1+x+2y)$		**Exercice 1 :** Etudier les extrema de la fonction $f : (x,y) \mapsto \sin x \sin y \in (x+y)$		**Exercice 1 :** Etudier les extrema de la fonction $f : (x,y) \mapsto xe^y + ye^x$	
Exercice 2 : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $(\mathbb{R}^*)^2$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout (r,θ) de $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$, on pose $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ et exprimer ses dérivées partielles d'ordre 2 : $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$ en fonction de celles de f. 2. En déduire une expression de $\Delta f(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ en fonction des dérivées partielles de f et des coordonnées polaires de (x,y).		**Exercice 2 :** 1. $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ / \ u - v > 0\}$ $\varphi : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & (u^2+v^2, u+V) \end{array}$ Montrer que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V à préciser. 2. Déterminer les applications $f \in \mathcal{C}^2(V,\mathbb{R})$ telles que $\forall (x,y) \in V$, $2(y^2-x)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2y\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - (y^2-x) = 0$		**Exercice 2 :** Résoudre l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ en posant $u = x + \lambda y$ et $v = x + \lambda y$, λ et μ étant à déterminer.	