Oral TSI-01

Vous traiterez les deux exercices dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, telle que

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \quad f(t) = |t|$$

1. Développer f en série de Fourier sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire les valeurs des sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad , \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

Exercice 2

Reconnaître l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer ses éléments caractéristiques.

Oral TSI-02

Vous traiterez les deux exercices dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1

Résoudre le système dfférentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y - 4z + te^t - t \\ y' = -2x + 3y + 2z + te^t - 2t + 2 \\ z' = 3x - 3y - 4z - 1 \end{cases}$$

d'inconnues : $x, y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Exercice 2

Déterminer les extremums locaux de la fonction :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \sin^2(x) - \operatorname{sh}^2(y) \end{array} \right.$$

Oral TSI-03

Vous traiterez les deux exercices dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1

On considère l'espace $E = \mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire usuel. Soit F le sous-espace vectoriel défini par :

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ \left\{ \begin{array}{l} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{array} \right. \right\}$$

1. Déterminer une base orthonormale de F.
2. Déterminer un système d'équation de $F^{\perp}$, orthogonal de F.
3. Calculer la distance du point $x = (1, 0, 0, 1)$ au sous-espace F.

Exercice 2

Etudier et tracer la courbe d'équation polaire :

$$\rho = \sin\left(\frac{2\theta}{3}\right)$$

Oral TSI-04

Vous traiterez les deux exercices dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1

Soit E un espace euclidien, dont on note $< .|. >$ le produit scalaire.
Soit f un endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall x, y \in E, < f(x)|y > = < x|f(y) >$$

1. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$.
3. Montrer que les sous-espaces propres de f sont orthogonaux 2 à 2.

Exercice 2

Résoudre sur $I =]\sqrt{3}, +\infty[$ l'équation différentielle :

$$(t^2 - 3)\, y'' - 4t\, y' + 6t = \frac{(t^2-3)^3}{t}$$

On cherchera tout d'abord des solutions polynomiales de l'équation homogène associée.

Oral TSI-05

Vous traiterez les deux exercices dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la conique $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne :

$$x^2 + xy + y^2 - x + 4y + 5 = 0$$

Exercice 2

Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ fixé.
Développer en série entière au voisinage de 0 la fonction :

$$f : x \longmapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{1+x}{1-x}\tan\theta\right)$$

Oral TSI-06

Vous traiterez les deux exercices dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

1. Déterminer une base orthonormale de F, puis de son orthogonal $F^\perp$.
2. Soit $x = (1, 0, 0)$.
   (a) Déterminer l'image de x par la projection orthogonale sur F.
   (b) Calculer $d(x, F)$.
   (c) Déterminer l'image de x par la symétrie orthogonale par rapport à F.

Exercice 2

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{\mathrm{ch} n}{\mathrm{ch} 2n}$$

Oral TSI-07

Vous traiterez les deux exercices dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1

On pose l'application suivante :

$$\varphi : (u, v) \mapsto (ue^v \ , \ e^{-v})$$

1. Justifier que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\Omega = \mathbb{R}\times]0, +\infty[$.
2. Déterminer les solutions dans $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ de :

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} - y\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Exercice 2

On considère l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie dans la base $\mathcal{B}$ par :

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ , \qquad q(x) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_1x_3$$

1. Ecrire A la matrice de la forme quadratique dans la base $\mathcal{B}$.
2. Justifier que A est diagonalisable, et diagonaliser A.

Oral TSI-08

Vous traiterez les deux exercices dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1

On définit la surface (S) par le système d'équations suivant :

$$(S) \quad : \quad \begin{cases} x = t\cos\theta \\ y = t\sin\theta \\ z = t^2 \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R},\ \theta \in]0, +\infty[$$

Déterminer l'ensemble des points de (S) en lesquels le plan tangent est parallèle au vecteur $\overrightarrow{u}(1,1,1)$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ par :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}(-2x - y + 2z + 3) \\ y' = \dfrac{1}{3}(2x - 2y + z + 3) \\ z' = \dfrac{1}{3}(x + 2y + 2z + 9) \end{cases}$$

Reconnaître la transformation f et déterminer ses éléments caractéristiques.

Oral TSI-09

Vous traiterez les deux exercices dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1

Déterminer les fonctions développables en série entière au voisinage de 0, qui sont solutions de l'équation différentielle :

$$(E) \quad : \quad t^2y'' - t(2t^2-1)y' - (2t^2+1)y = 0$$

Exercice 2

Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur le plan P d'équation

$$x - 2y + z = 0$$

Oral TSI-10

Vous traiterez les deux exercices dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'application linéaire définie sur $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $f(X) = AX$.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$, ainsi que leurs dimensions.
2. Déterminer les valeurs propres de f, ainsi que les sous-espaces propres correspondants.

Exercice 2

Soit Γ la courbe de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2t^3 + 3t^2 \\ y = 3t^2 + 6t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Etudier et tracer la courbe Γ.
2. Déterminer la longueur de l'arc $\widetilde{AO}$ où A est le point de rebroussement de la courbe Γ et O est l'origine du repère.

Oral TSI-11

Vous traiterez les deux exercices dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1

1. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

2. Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \text{Arccos}\left(\frac{2}{\pi}\text{Arctan} n^2\right)$$

Exercice 2

Déterminer les droites du plan contenant le point $A(2, 3)$ et tangentes au cercle $\mathcal{C}$ d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2x + \frac{4}{5} = 0$$

Oral TSI-12

Vous traiterez les deux exercices dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1

Ecrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur la droite D d'équations :

$$x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \int_0^{\pi/2} e^{-x\cos t} \cos(x \sin t) dt$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.
2. En déduire que :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin t}{dt}$$

3. En déduire l'égalité suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$