Epreuve du CAPES Externe 1985

Notations et objectif du problème

On note P le plan euclidien orienté et Π l'ensemble des vecteurs de P. Le choix d'un point de P permet d'identifier P et Π. Les applications affines de P dans lui-même sont plus simplement appelées **applications affines** et sont notées par des lettres minuscules. Les endomorphismes de Π associés sont appelés **endomorphismes** et sont notés par la lettre majuscule correspondante. On rappelle qu'une application affine f est déterminée par l'endomorphisme associé F et par l'image d'un point ; lorsque f fixe un point, son étude est ramenée à celle de F. Pour qu'une application affine f soit une **transformation affine**, il faut et il suffit que F soit un **automorphisme**, ce qui revient à dire que le déterminant de F, noté $\det(F)$, est non nul ; on dit alors que f et F sont **directs** si $\det(F) > 0$, et **indirects** si $\det(F) < 0$.

La symétrie orthogonale s par rapport à une droite D est appelée **réflexion** d'axe D. L'automorphisme orthogonal S associé est appelé réflexion d'axe Δ, où Δ désigne la direction de D.

Pour tout nombre réel θ, on note R_θ la **rotation** de Π dont θ est une mesure de l'angle. Lorsque $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, il s'agit du **quart de tour direct**, noté plus simplement R. Dans ces conditions, toute rotation R_θ s'écrit sous la forme $R_\theta = \cos\theta I + \sin\theta R$, où I désigne l'identité.

La donnée d'un **parallélogramme** (ordonné) $\Gamma = (O, J, K, L)$ de P, où $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OL}$, équivaut à celle de $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, où $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OL}$. Dans toute la suite, on suppose que Γ n'est pas aplati, ce qui revient à dire que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base. Si cette base est directe, on dit que Γ est direct ; dans le cas contraire, on dit que Γ est indirect. Lorsque Γ est un carré, on dit que $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un **repère carré**, ou encore que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une **base carrée**, ce qui revient à dire que $\overrightarrow{v} = R(\overrightarrow{u})$ si cette base est directe, et $\overrightarrow{v} = -R(\overrightarrow{u})$ dans le cas contraire.

L'objectif du problème est d'étudier les décompositions d'une transformation affine de P en transformations élémentaires, notamment les similitudes et les affinités orthogonales, ce qui fait l'objet des parties IV et V, la partie II étant consacrée à quelques résultats élémentaires. A cet effet, on utilise un outil géométrique, à savoir l'action des transformations sur les parallélogrammes et sur les carrés (parties I et V), et un outil algébrique, à savoir la décomposition d'un endomorphisme en somme de similitudes (partie III).

Partie I
Caractérisation des similitudes par leur action sur les carrés

On dit qu'une transformation affine f est une **similitude** de rapport ρ si l'automorphisme associé G est de la forme $G = \rho U$, où $\rho > 0$ et où U est un automorphisme orthogonal, dit associé à g. Dans ces conditions, on dit aussi que G est une similitude.

1. Prouver que l'image d'un parallélogramme par une transformation affine f est encore un parallélogramme. Etant donné des parallélogrammes Γ et Γ', établit l'existence et l'unicité d'une transformation affine transformant Γ en Γ'.
2. Soient g une transformation affine et G l'automorphisme associé. Montrer qu'il est équivalent de dire :
   (a) La transformation g est une similitude directe de P.
   (b) Il existe un carré direct dont l'image par g est un carré direct.
   (c) Les automorphismes G et R commutent.
   (d) L'image par g de tout carré direct est un carré direct.
3. Caractériser de même les similitudes indirectes.
4. Soit $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère non carré. Montrer que $(O, \overrightarrow{u} + R(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{v} - R(\overrightarrow{u}))$ est un repère carré indirect, $(O, \overrightarrow{u} - R(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{v} + R(\overrightarrow{u}))$ est un repère carré direct, et que ce dernier repère se déduit du précédent par une similitude indirecte. Exprimer le rapport ρ de cette similitude et déterminer l'axe Δ de la réflexion associée U. Le plan P étant rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, mettre en place sur une même figure les trois repères précédents et les parallélogrammes associés lorsque $\overrightarrow{u} = (3, 2)$, et $\overrightarrow{v} = (6, -1)$. Expliciter ρ et Δ. On prendra l'unité de longueur égale à 1 cm.

Partie II
Affinités orthogonales : compositionn, conjugaison

Etant donnés une droite D de P et un nombre réel λ non nul, on appelle **affinité orthogonale** d'axe D et de rapport λ la transformation affine a de P qui, à tout point M, associe le point N défini par la relation $\overrightarrow{HN} = \lambda \overrightarrow{HM}$, où H est la projection orthogonale de M sur D. L'automorphisme A associé est appelé affinité orthogonale d'axe Δ et de rapport λ, où Δ est la direction de D.

Dans cette partie, on considère des affinités de rapport différent de 1.

1. **Composée de deux affinités orthogonales**
   Soient a_1 et a_2 des affinités orthogonales d'axes respectifs D_1 et D_2 et de rapports respectifs λ_1 et λ_2. Soit f la composée de a_1 et a_2, notée $f = a_2 a_1$.
   (a) Déterminer la nature de f lorsque D_1 et D_2 sont parallèles et préciser l'ensemble des points fixes de f.
   (b) Montrer que D_1 et D_2 sont sécantes si et seulement si f admet un point fixe et un seul.
2. **Caractérisation du cas où ces affinités commutent**.
   (a) Déterminer toutes les droites stables par une affinité orthogonale a.
   (b) Prouver que si deux transformations affines f_1 et f_2 commutent (c'est-à-dire sont telles que $f_2 f_1 = f_1 f_2$), l'ensemble des points fixes de f_1 est stable par f_2.
   (c) Caractériser géométriquement les coples (a_1, a_2) d'affinités orthogonales tels que a_1 et a_2 commutent.
3. **Effet d'une conjugaison sur une affinité**.
   Soit a une affinité orthogonale d'axe D et de rapport λ. Préciser la nature de la transformation $a' = gag^{-1}$, où g est une similitude (on pourra d'abord déterminer les droites stables par a'). Que se passe-t-il si on suppose seulement que g est une transformation affine ?

Partie III
Décomposition d'un endomorphisme en somme de similitudes

L'objectif de cette partie est d'étudier la décomposition d'un endomorphisme en somme d'une similitude directe et d'une similitude indirecte et, à partir de là, de caractériser les endomorphismes symétriques, c'est-à-dire les endomorphismes B tels que, pour tout couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de vecteurs, $B(\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}.B(\overrightarrow{v})$.

On note $\mathcal{L}(\Pi)$ l'algèbre des endomorphismes de Π.

1. **Opération du quart de tour direct par conjugaison**
   A tout endomorphisme F, on associe l'endomorphisme $\sigma(F) = RFR^{-1}$.
   (a) Vérifier que $\sigma \circ \sigma$ est l'identité de $\mathcal{L}(\Pi)$.
   (b) Soit $\mathcal{S}_+$ (resp. $\mathcal{S}_-$) le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\Pi)$ constitué des endomorphismes G tels que $\sigma(G) = G$ (resp. $\sigma(G) = -G$). Prouver que $\mathcal{L}(\Pi)$ est somme directe des sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}_+$ et $\mathcal{S}_-$, les projecteurs associés étant $F \longmapsto \frac{1}{2}\left(F + RFR^{-1}\right)$ et $F \longmapsto \frac{1}{2}\left(F - RFR^{-1}\right)$.
   (c) Vérifier que les éléments non nuls de $\mathcal{S}_+$ (resp. de $\mathcal{S}_-$) sont les similitudes directes (resp. indirectes).

2. **Ecriture canonique d'un endomorphisme**
   (a) Etablir que tout endomorphisme F peut s'écrire sous la forme (dite canonique)
   $$F = \alpha I + \beta R + \gamma S$$
   où α, β, γ sont des nombres réels, et où S est une réflexion. Etudier l'unicité d'une telle écriture, en distinguant deux cas suivant que F appartient à $\mathcal{S}_+$ ou non. On observera que $\gamma S = (-\gamma)(-S)$.
   (b) Dans ces conditions, expliciter la matrice associée à F dans une base orthonormale directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ telle que $S(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i}$. Calculer le déterminant et le polynôme caractéristique de F en fonction de α, β et γ.
   (c) Caractériser les triplets (α, β, γ) tels que F soit symétrique. Préciser alors les valeurs propres et les sous-espaces propres de F.

Partie IV
Décomposition des transformations symétriques ayant un point fixe

Les transformations considérées dans cette partie ont un point fixe donné O. Pour tout nombre réel λ non nul, l'homothétie de centre O et de rapport λ est notée h_λ.

1. **Caractérisation des affinités orthogonales**
   (a) Prouver que toute affinité orthogonale A est un endomorphisme symétrique.
   (b) Etant donné une réflexion S, caractériser les couples (α, γ) de nombres réels tels que $B = \alpha I + \gamma S$ soit une affinité orthogonale.

2. **Décomposition en produit d'une affinité orthogonale et d'une homothétie.**
   Soient b une transformation affine fixant O et B l'automorphisme associé. Prouver qu'il est équivalent de dire :
   (a) La transformation b est symétrique, autrement dit, B est symétrique.
   (b) La transformation b peut s'écrire sous la forme $b = h_\lambda a$, où $\lambda \neq 0$ et où a est une affinité orthogonale dont l'axe D passe par O.

   Montrer que, dans ces conditions, λ est une valeur propre de B, et étudier l'unicité d'une telle décomposition, en distinguant deux cas selon que b est une homothétie ou non.

3. **Décomposition en produit de deux affinités orthogonales**
   Prouver qu'il ext équivalent de dire :
   (a) La transformation b est symétrique.
   (b) La transformation b peut s'écrire sous la forme $f = a_2 a_1$, où a_1 et a_2 sont des affinités orthogonales dont les axes D_1 et D_2 sont orthogonaux et passent par O.

   Préciser alors les droites D_1 et D_2 ainsi que les rapports λ_1 et λ_2 de ces affinités.

Partie V
Décomposition des transformations ayant un point fixe

Dans les cinq premières questions de cette partie, on étudie une tranformation affine f ayant un point fixe O en exploitant l'écriture canonique de F.

1. **Décomposition en produit d'une réflexion et d'une transformation symétrique**.
   (a) Déterminer toutes les réflexions S_1 telles que FS_1 soit symétrique. A cet effet, on pourra utiliser l'écriture canonique de F et on distinguera deux cas selon que F est une similitude directe ou non.
   (b) En déduire que f peut s'écrire sous la forme $f = bs$, où b est symétrique et fixe O, et où s est une réflexion dont l'axe passe par O. Etudier l'unicité d'une telle décomposition.
2. **Décomposition en produit d'une similitude indirecte et d'une affinité orthogonale**.
   Etablir que f peut s'écrire sous la forme $f = ag$, où a est une affinité orthogonale dont l'axe passe par O, et où g est une similitude indirecte de centre O. Etudier l'unicité d'une telle décomposition lorsque f n'est pas une similitude. Examiner aussi les cas où f est une similitude indirecte, ou directe.
3. **Interprétation géométrique de cette dernière décomposition**
   Dans cette question, on suppose que f n'est pas une similitude, et on fixe une base orthonormale directe $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
   (a) Prouver que la recherche d'un couple (a, g) tel que $f = ag$ équivaut à celle d'une affinité orthogonale $A = \alpha' I + \gamma' S'$, et d'une base carrée directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ telles que $A(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{u}$ et $A(\overrightarrow{j}) = -\overrightarrow{v}$, où $\overrightarrow{u} = F(\overrightarrow{e_1})$ et $\overrightarrow{v} = F(\overrightarrow{e_2})$.
   (b) En appliquant à A les résultats de III.1., montrer que $\overrightarrow{i}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u} + R(\overrightarrow{v})$ et que $S'(\overrightarrow{i})$ est colinéaire à $\overrightarrow{u} - R(\overrightarrow{v})$.
   (c) Lorsque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont les vecteurs indiqués dans la question I.4., déterminer tous les triplets $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ satisfaisant aux conditions précédentes. Pour chacun d'eux, reprendre la figure du I.4., expliciter $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ ainsi que l'axe de A, et donner le rapport de A.
4. **Décomposition en produit d'affinités orthogonales**.
   Montrer que f peut s'écrire sous la forme $f = a_2 a_1 s$, où a_1 et a_2 sont des affinités orthogonales d'axes orthogonaux passant par O, et s est une réflexion d'axe passant par O.
5. **Existence d'une décomposition en produit de deux affinités orthogonales**.
   L'objectif est de caractériser les automorphismes F qui peuvent s'écrire comme produit de deux affinités orthogonales. A cet effet, on écrit F sous la forme canonique $F = \alpha I + \beta R + \gamma S$. Le cas des endomorphismes symétriques étant déjà traité, on suppose que $\beta \neq 0$.
   (a) En écrivant les affinités sous forme canonique, étudier le cas où F est une similitude directe, c'est-à-dire où $\gamma = 0$. Désormais, on écartera ce cas.
   (b) Soit R_θ une rotation. Prouver que l'existence d'une décomposition de F équivaut à celle d'une décompositition de $R_\theta F R_\theta^{-1}$.
   (c) Calculer $R_\theta F R_\theta^{-1}$. En déduire que $F' = \alpha' I + \beta' R + \gamma' S'$ est conjugué de F par rotation si et seulement si $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, et $\gamma' = \pm\gamma$, c'est-à-dire si $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$ et $\det(F') = \det(F)$. On posera désormais $\delta = \det(F)$.
   (d) Vu ces résultats, on est ramené au problème suivant : existe-t-il des affinités orthogonales A_1 et A_2 telles que l'automorphisme $F' = A_2 A_1$ satisfasse aux conditions énoncées au c ? Soient alors λ_1 et λ_2 les rapports de A_1 et A_2, D_1 et D_2 leurs axes et φ une mesure de l'angle (D_1, D_2). En écrivant A_1 et A_2 sous forme canonique, montrer que tout revient à déterminer un triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \varphi)$ de nombres réels tels que
   $$\begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 = \delta \\ (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\sin^2\varphi = \delta - 2\alpha + 1 \\ (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\sin\varphi\cos\varphi = 2\beta \end{cases}$$
   (e) On pose $\tau = \delta - 2\alpha + 1$. Montrer que $\tau = 0$ si et seulement si 1 est valeur propre de F, et que, dans ce cas, la décomposition est impossible.
   (f) On écarte désormais ce cas, et on prend φ tel que $\tan\varphi = \dfrac{\tau}{2\beta}$. Calculer $\lambda_1 + \lambda_2$ en fonction de β, δ et τ et en déduire la condition d'existence d'un couple (λ_1, λ_2) de nombres réels satisfaisant aux conditions du d.
6. Etudier enfin les décompositions d'une transformation affine quelconque f. On établira d'abord que f admet un point fixe et un seul si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de F, c'est-à-dire si $\tau \neq 0$.