# Epreuve du CAPES Externe 1985

*Corrigé*

---

## Notations et objectif du problème

**On note $P$ le plan euclidien orienté et $\Pi$ l'ensemble des vecteurs de $P$. Le choix d'un point de $P$ permet d'identifier $P$ et $\Pi$. Les applications affines de $P$ dans lui-même sont plus simplement appelées applications affines et sont notées par des lettres minuscules. Les endomorphismes de $\Pi$ associés sont appelés endomorphismes et sont notés par la lettre majuscule correspondante. On rappelle qu'une application affine $f$ est déterminée par l'endomorphisme associé $F$ et par l'image d'un point ; lorsque $f$ fixe un point, son étude est ramenée à celle de $F$. Pour qu'une application affine $f$ soit une transformation affine, il faut et il suffit que $F$ soit un automorphisme, ce qui revient à dire que le déterminant de $F$, noté $\det(F)$, est non nul ; on dit alors que $f$ et $F$ sont directs si $\det(F) > 0$, et indirects si $\det(F) < 0$.**

**La symétrie orthogonale $s$ par rapport à une droite $D$ est appelée réflexion d'axe $D$. L'automorphisme orthogonal $S$ associé est appelé réflexion d'axe $\Delta$, où $\Delta$ désigne la direction de $D$.**

**Pour tout nombre réel $\theta$, on note $R_\theta$ la rotation de $\Pi$ dont $\theta$ est une mesure de l'angle. Lorsque $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, il s'agit du quart de tour direct, noté plus simplement $R$. Dans ces conditions, toute rotation $R_\theta$ s'écrit sous la forme $R_\theta = \cos\theta I + \sin\theta R$, où $I$ désigne l'identité.**

**La donnée d'un parallélogramme (ordonné) $\Gamma = (O, J, K, L)$ de $P$, où $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OL}$, équivaut à celle de $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, où $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OL}$. Dans toute la suite, on suppose que $\Gamma$ n'est pas aplati, ce qui revient à dire que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base. Si cette base est directe, on dit que $\Gamma$ est direct ; dans le cas contraire, on dit que $\Gamma$ est indirect. Lorsque $\Gamma$ est un carré, on dit que $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un repère carré, ou encore que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base carrée, ce qui revient à dire que $\overrightarrow{v} = R(\overrightarrow{u})$ si cette base est directe, et $\overrightarrow{v} = -R(\overrightarrow{u})$ dans le cas contraire.**

**L'objectif du problème est d'étudier les décompositions d'une transformation affine de $P$ en transformations élémentaires, notamment les similitudes et les affinités orthogonales, ce qui fait l'objet des parties IV et V, la partie II étant consacrée à quelques résultats élémentaires. A cet effet, on utilise un outil géométrique, à savoir l'action des transformations sur les parallélogrammes et sur les carrés (parties I et V), et un outil algébrique, à savoir la décomposition d'un endomorphisme en somme de similitudes (partie III).**

---

## Partie I
## Caractérisation des similitudes par leur action sur les carrés

**On dit qu'une transformation affine $f$ est une similitude de rapport $\rho$ si l'automorphisme associé $G$ est de la forme $G = \rho U$, où $\rho > 0$ et où $U$ est un automorphisme orthogonal, dit associé à $g$. Dans ces conditions, on dit aussi que $G$ est une similitude.**

1. **Prouver que l'image d'un parallélogramme par une transformation affine $f$ est encore un parallélogramme.**
   Soit $\Gamma = (A, B, C, D)$ un parallélogramme de $P$ et soient $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$, $f(D)$ les images respectives de $A$,$B$,$C$,$D$ par $f$. On a alors :
   $$\overrightarrow{f(A)f(C)} = F(\overrightarrow{AC}) = F(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = F(\overrightarrow{AB}) + F(\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{f(A)f(B)} + \overrightarrow{f(A)f(D)}$$
   donc $(f(A), f(B), f(C), f(D))$ est un parallélogramme.

**Etant donné des parallélogrammes $\Gamma$ et $\Gamma'$, établit l'existence et l'unicité d'une transformation affine transformant $\Gamma$ en $\Gamma'$.**
Soient $\Gamma = (A, B, C, D)$ et $\Gamma' = (A', B', C', D')$ deux parallélogrammes. Soit $f$ la transformation affine telle que

$$f(A) = A', \quad F(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}, \quad F(\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{A'D'}$$

L'image de $C$ par $f$ est bien $C'$ car :

$$\overrightarrow{f(A)f(C)} = F(\overrightarrow{AC}) = F(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = F(\overrightarrow{AB}) + F(\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{f(A)C'}$$

L'existence de $f$ est donc prouvée. L'unicité de $f$ provient du fait que l'image d'un point (ici $A$) et la connaissance de $F$ déterminent $f$ de manière unique.

2. **Soient $g$ une transformation affine et $G$ l'automorphisme associé. Montrer qu'il est équivalent de dire :**
   (a) **La transformation $g$ est une similitude directe de $P$.**
   (b) **Il existe un carré direct dont l'image par $g$ est un carré direct.**
   (c) **Les automorphismes $G$ et $R$ commutent.**
   (d) **L'image par $g$ de tout carré direct est un carré direct.**

$\boxed{\text{(a)} \Rightarrow \text{(b)}}$

Soit $(A, B, C, D)$ un carré direct. Son image par $g$ est un parallélogramme qui vérifie :

$$\|G(\overrightarrow{AB})\| = \|\rho U(\overrightarrow{AB})\| = \rho\|\overrightarrow{AB}\| = \begin{cases} \rho\|\overrightarrow{AD}\| = \|\rho U(\overrightarrow{AD})\| = \|G(\overrightarrow{AD})\| \\ \rho\|\overrightarrow{DC}\| = \|\rho U(\overrightarrow{DC})\| = \|G(\overrightarrow{DC})\| \\ \rho\|\overrightarrow{CB}\| = \|\rho U(\overrightarrow{CB})\| = \|G(\overrightarrow{CB})\| \end{cases}$$

C'est donc un carré.
Pour montrer que ce carré est direct, il suffit de vérifier que la base $(G(\overrightarrow{AB}), G(\overrightarrow{AD})$ est directe :

$$\det_{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})}(G(\overrightarrow{AB}), G(\overrightarrow{AD})) = \det(G) \det_{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \det(G) > 0$$

car $g$ est une similitude directe.

$\boxed{\text{(b)} \Rightarrow \text{(c)}}$

Soit $(A, B, C, D)$ le carré direct dont l'image par $g$ est un carré direct. On sait donc que :

$$\overrightarrow{AD} = R(\overrightarrow{AB}) \Longrightarrow G(\overrightarrow{AD}) = G \circ R(\overrightarrow{AB}) \Longrightarrow G \circ R(\overrightarrow{AB}) = G \circ R(\overrightarrow{AB})$$

De plus, comme $R^2 = -I$, on a :

$$R \circ G(\overrightarrow{AD}) = R \circ R(G(\overrightarrow{AB})) = -G(\overrightarrow{AB}) = G(-\overrightarrow{AB}) = G(R^2(\overrightarrow{AB})) = G \circ R(\overrightarrow{AD})$$

Donc on a : $R \circ G(\overrightarrow{AB}) = G \circ R(\overrightarrow{AB})$ et $R \circ G(\overrightarrow{AD}) = G \circ R(\overrightarrow{AD})$, et comme $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est une base de $\Pi$, on a donc $R \circ G = G \circ R$.

$\boxed{\text{(c)} \Rightarrow \text{(d)}}$

On suppose que $G \circ R = R \circ G$. Soit $(A, B, C, D)$ un carré direct quelconque. D'après la question 1, $(g(A), g(B), g(C), g(D))$ est un parallélogramme. Montrons que c'est un carré :

$$G(\overrightarrow{AD}) = G(R(\overrightarrow{AB})) = R \circ G(\overrightarrow{AB})$$

donc le parallélogramme $(g(A), g(B), g(C), g(D))$ est direct.
Comme $G(\overrightarrow{AD}) = R \circ G(\overrightarrow{AB})$, les droites $(g(A)g(D))$ et $(g(A)g(B))$ sont orthogonales. Le parallélogramme obtenu est donc un rectangle.
De même, $G(\overrightarrow{AD}) = R \circ G(\overrightarrow{AB})$ donne que $\|G(\overrightarrow{AB})\| = \|G(\overrightarrow{AB}\|$ car $R$ est une isométrie. Le rectangle $(A, B, C, D)$ est donc un carré.

$\boxed{\text{(d)} \Rightarrow \text{(a)}}$

Il suffit de considérer un carré direct de $P$ : $(A,B,C,D)$. Son image par $g$ est un carré direct donc $G$ vérifie :

$$\begin{cases} \|G(\overrightarrow{AB})\| = \|G(\overrightarrow{AD})\| = \rho\|\overrightarrow{AB}\| \quad \text{avec } \rho > 0 \\ G(\overrightarrow{AB}).G(\overrightarrow{AD}) = 0 \\ R(G(\overrightarrow{AB})) = G(\overrightarrow{AD}) \Longrightarrow \det_{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})}(G(\overrightarrow{AB}), G(\overrightarrow{AD})) > 0 \end{cases}$$

$G$ est donc la composée de l'homothétie de rapport $\rho > 0$ et d'une isométrie positive. $g$ est donc une similitude directe.

3. **Caractériser de même les similitudes indirectes.**

   On peut caractériser de même les similitudes indirectes. Soit $g$ une transformation affine et $G$ l'automorphisme associé. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

   (a) La transformation $g$ est une similitude indirecte de $P$.

   (b) Il existe un carré direct dont l'image par $g$ est un carré indirect.

   (c) Les automorphismes $G$ et $R$ anticommutent, *i.e.* $R \circ G = G \circ R$

   (d) L'image par $g$ de tout carré direct est un carré indirect.

   La démonstration de ces équivalences se fait de façon identique aux équivalences de la question précédente.

4. **Soit $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère non carré. Montrer que $(O, \overrightarrow{u} + R(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{v} - R(\overrightarrow{u}))$ est un repère carré indirect, $(O, \overrightarrow{u} - R(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{v} + R(\overrightarrow{u}))$ est un repère carré direct, et que ce dernier repère se déduit du précédent par une similitude indirecte. Exprimer le rapport $\rho$ de cette similitude et déterminer l'axe $\Delta$ de la réflexion associée $U$. Le plan $P$ étant rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, mettre en place sur une même figure les trois repères précédents et les parallélogrammes associés lorsque $\overrightarrow{u} = (3,2)$, et $\overrightarrow{v} = (6,-1)$. Expliciter $\rho$ et $\Delta$. On prendra l'unité de longueur égale à 1 cm.**

   Soit $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère non carré. $(O, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{R}(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{v} - R(\overrightarrow{u}))$ est un repère carré indirect car :

$$R(\overrightarrow{u} + R(\overrightarrow{v})) = R(\overrightarrow{u}) + R^2(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v} + R(\overrightarrow{u}) = -(\overrightarrow{v} - R(\overrightarrow{u}))$$

   ce qui implique que $\|\overrightarrow{u} + R(\overrightarrow{v})\| = \|v - R(\overrightarrow{u})\| \neq 0$ et $(\overrightarrow{u} + R(\overrightarrow{v})).(\overrightarrow{v} - R(\overrightarrow{u})) = 0$.
   De même, $(O, \overrightarrow{u} - R(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{v} + R(\overrightarrow{u}))$ est un repère carré direct car :

$$R(\overrightarrow{u} - R(\overrightarrow{v})) = R(\overrightarrow{u}) - R^2(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} + R(\overrightarrow{u})$$

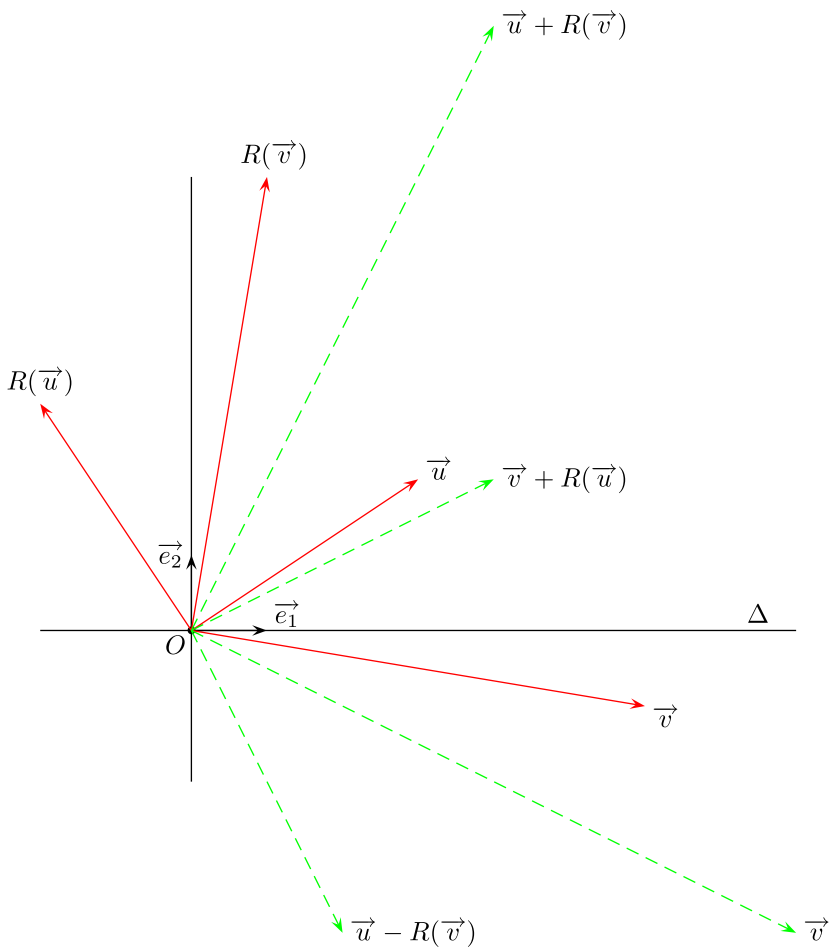
   On passe du repère $(O, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{R}(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{v} - R(\overrightarrow{u}))$ au repère $(O, \overrightarrow{u} - R(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{v} + R(\overrightarrow{u}))$ par une similitude indirecte. En effet, soit $S$ la similitude indirecte qui envoie le carré direct $(O, \overrightarrow{u} - R(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{v} + R(\overrightarrow{u}))$ sur le carré indirect $(O, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{R}(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{v} - R(\overrightarrow{u}))$ (c'est bien une similitude indirecte d'après la question 3). Alors $S^{-1}$ est la similitude indirecte demandée :

$$S^{-1}(\overrightarrow{u} + R(\overrightarrow{v})) = \overrightarrow{u} - R(\overrightarrow{v}) \quad \Longrightarrow \quad \rho = \frac{\|\overrightarrow{u} - R(\overrightarrow{v})\|}{\|\overrightarrow{u} + R(\overrightarrow{v})\|}$$

   L'axe de la réflexion associée $U$ passe par $O$ et est de direction $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{u} + R(\overrightarrow{v}) + \frac{1}{\rho}\left(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{R}(\overrightarrow{v})\right)\right)$ (car $\overrightarrow{u} + R(\overrightarrow{v})$ est transformé par $U$ en $\frac{1}{\rho}(\overrightarrow{u} - R(\overrightarrow{v}))$.
   Dans l'exemple demandé, on a :

$$\rho = \frac{\|3\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_1} - 6\overrightarrow{e_2}\|}{\|3\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_1} + 6\overrightarrow{e_2}\|} = \frac{\sqrt{4+16}}{\sqrt{16+64}} = \frac{1}{2}$$

$$\Delta = (O, \overrightarrow{e_1})$$




# Partie II
# Affinités orthogonales : compositionn, conjugaison

**Etant donnés une droite $D$ de $P$ et un nombre réel $\lambda$ non nul, on appelle affinité orthogonale d'axe $D$ et de rapport $\lambda$ la transformation affine $a$ de $P$ qui, à tout point $M$, associe le point $N$ défini par la relation $\overrightarrow{HN} = \lambda \overrightarrow{HM}$, où $H$ est la projection orthogonale de $M$ sur $D$. L'automorphisme $A$ associé est appelé affinité orthogonale d'axe $\Delta$ et de rapport $\lambda$, où $\Delta$ est la direction de $D$.**

**Dans cette partie, on considère des affinités de rapport différent de 1.**

1. **Composée de deux affinités orthogonales**
   **Soient $a_1$ et $a_2$ des affinités orthogonales d'axes respectifs $D_1$ et $D_2$ et de rapports respectifs $\lambda_1$ et $\lambda_2$. Soit $f$ la composée de $a_1$ et $a_2$, notée $f = a_2 a_1$.**
   (a) **Déterminer la nature de $f$ lorsque $D_1$ et $D_2$ sont parallèles et préciser l'ensemble des points fixes de $f$.**
   $D_1$ et $D_2$ sont parallèles. Prenons un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ tel que $D_1 = O + Vect(\overrightarrow{e_1})$ et $D_2$ est alors la droite d'équation $y = c$ dans ce repère.
   L'image d'un point $M(x, y)$ devient donc :
   $$a_1(M)(x, \lambda_1 y), \quad a_2(M)(x, c + \lambda_2(y - c))$$
   d'où :
   $$f(M)(x, c + \lambda_2(\lambda_1 y - c)), \quad \text{autrement dit } f(M)(x, \lambda_2\lambda_1 y - c(\lambda_2 - 1))$$

Si $\lambda_1\lambda_2 = 1$, $f$ est la translation de vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ -c(\lambda_2 - 1) \end{pmatrix}$

Si $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$, $f$ est l'affinité orthogonale d'axe la droite $D$ d'équation $y = -c\dfrac{1-\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2 - 1}$, et de rapport $\lambda_1\lambda_2$.

En effet, on a :

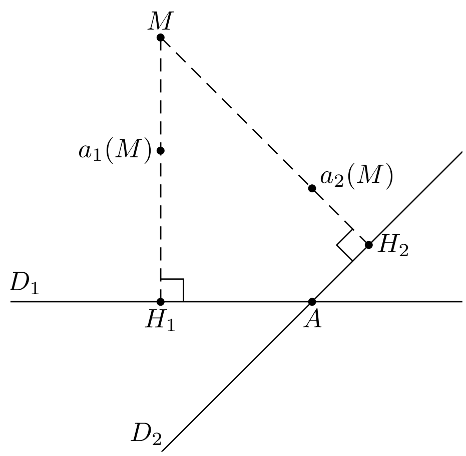
$$\lambda_2\lambda_1 y - c(\lambda_2 - 1) = \lambda_2\lambda_1\left(y + c\frac{1-\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2 - 1}\right) - c\frac{\lambda_2\lambda_1(1-\lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2 - 1} - c(\lambda_2 - 1) = \lambda_2\lambda_1\left(y + c\frac{1-\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2 - 1}\right) - c\frac{1-\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2 - 1}$$

En conclusion : La composée de deux affinités orthogonales d'axes parallèles est une translation si le produit des rapports est 1, une affinité orthogonale dans l'autre cas.

(b) **Montrer que $D_1$ et $D_2$ sont sécantes si et seulement si $f$ admet un point fixe et un seul.**

Soient $a_1$ et $a_2$ deux affinités orthogonales d'axes respectifs $D_1$ et $D_2$ et de rapports respectifs $\lambda_1$ et $\lambda_2$.

Supposons que $D_1 \cap D_2 = \{A\}$, alors $a_2a_1(A) = A$, donc $f = a_2 \circ a_1$ admet un point fixe.
Soit $M$ un point tel que $f(M) = M$. Alors : $a_1(M) = a_2^{-1}(M)$. Donc $(Ma_1(M)) \perp D_1$, $(Ma_2^{-1}(M) \perp D_2$. D'où $M \in D_1 \cap D_2$ ou $D_1 // D_2$. Or $D_1$ et $D_2$ sont sécantes, donc $M \in D_1 \cap D_2 \in \{A\}$




Réciproquement : nous avons montré que si $D_1$ et $D_2$ sont parallèles, $f$ a une droite de points fixes ou aucun point fixe, soit : si $f$ a un point fixe unique, alors $D_1$ et $D_2$ ne sont pas parallèles.

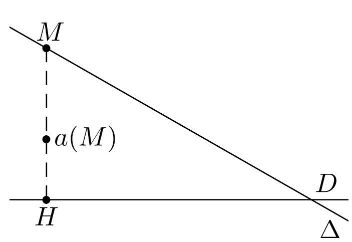
2. **Caractérisation du cas où ces affinités commutent**.

(a) **Déterminer toutes les droites stables par une affinité orthogonale $a$.**

Soit $a$ une affinité orthogonale d'axe $D$ et de rapport $\lambda$ et $\Delta$ une droite stable par $a$. Puisque $\lambda \neq 1$, on a :
Si $M \in \Delta$ et $M = a(M)$, on a $M \in D \cap \Delta$.
Si $M \in \Delta$, $a(M) \in \Delta$ et $M \neq a(M)$, on a $(Ma(M)) \perp D$, d'où $\Delta \perp D$.
Donc, pour une droite $\Delta$ stable par une affinité orthogonale $a$, on a deux possibilités :

$$\begin{cases} \Delta = D \text{ axe de } a \quad \text{et } \forall M \in \Delta,\ a(M) = M \\ \Delta \perp D \text{ et } \forall M \in \Delta \backslash D,\ a(M) \neq M \end{cases}$$

Ce sont les deux types de droites stables par une affinité orthogonale.



(b) **Prouver que si deux transformations affines $f_1$ et $f_2$ commutent (c'est-à-dire sont telles que $f_2 f_1 = f_1 f_2$), l'ensemble des points fixes de $f_1$ est stable par $f_2$.**
Supposons $f_1 f_2 = f_2 f_1$ et soit $M$ un point fixe de $f_1$.
Alors $f_1 f_2(M) = f_2 f_1(M) = f_2(M)$, donc $f_2(M)$ est un point fixe de $f_1$.

(c) **Caractériser géométriquement les couples $(a_1, a_2)$ d'affinités orthogonales tels que $a_1$ et $a_2$ commutent.**
Soient $a_1$ et $a_2$ deux affinités orthogonales d'axes respectifs $D_1$ et $D_2$ et de rapports respectifs $\lambda_1$ et $\lambda_2$.
On a $a_1(D_2) = a_1 a_2(D_2) = a_2(a_1(D_2))$, donc la droite $a_1(D_2)$ est stable par $a_2$ : c'est donc $D_2$ ou une droite orthogonale à $D_2$.
Soit $M \in D_2$. On a alors $a_2(M) = M \Rightarrow a_1(a_2(M)) = a_1(M) = a_2(a_1(M))$ , donc $a_1(M)$ est un point fixe de $a_2$ et $a_1(M)$ appartient à $D_2$. On a donc montré que $a_1(D_2) = D_2 \Rightarrow D_2 = D_1$ ou $D_1 \perp D_2$.
Réciproquement, si $D_1 = D_2$, on a $a_1 a_2 = a_2 a_1$ (évident)
Si $D_1 \perp D_2$, alors pour tout point $M$, on a $\lambda_2 \overrightarrow{H_2' a_1(M)} = \overrightarrow{H_2' a_2 a_1(M)}$, et $\lambda_2 \overrightarrow{H_2 M} = \overrightarrow{H_2 a_2(M)}$,
donc $(M a_1(M)) // (a_2(M) a_2 a_1(M))$.
Donc $\overrightarrow{H_1' a_2 a_1(M)} = \lambda_1 \overrightarrow{H_1' a_2(M)}$ et $a_2 a_1(M) = a_1 a_2(M)$.
Ainsi, on a montré que :

$$a_1 a_2 = a_2 a_1 \Longleftrightarrow a_1 \text{ et } a_2 \text{ ont même axe ou des axes orthogonaux}$$

3. **Effet d'une conjugaison sur une affinité.**
**Soit $a$ une affinité orthogonale d'axe $D$ et de rapport $\lambda$. Préciser la nature de la transformation $a' = gag^{-1}$, où $g$ est une similitude (on pourra d'abord déterminer les droites stables par $a'$). Que se passe-t-il si on suppose seulement que $g$ est une transformation affine ?**
Soit $\Delta$ une droite stable par $a'$. On a alors $\Delta = a'(\Delta) = gag^{-1}(\Delta)$. Donc $a(g^{-1}(\Delta)) = g^{-1}(\Delta)$. Ainsi $g^{-1}(\Delta)$ est une droite stable par $a$, c'est donc $D$ ou une droite perpendiculaire à $D$.

$a' = gag^{-1}$ est donc une affinité car l'application linéaire associée à $a'$ a une matrice semblable à celle de l'application linéaire associée à $a$ et est donc diagonalisable avec pour valeurs propres 1 et $\lambda$, si $\lambda$ est le rapport de l'affinité $a$.
Les seules droites stables par $a'$ sont orthogonales car $g^{-1}$ est une similitude, donc conserve l'orthogonalité ($g^{-1}(\Delta) = D \Rightarrow \Delta = g(D)$, et $g^{-1}(\Delta) \perp D \Rightarrow \Delta \perp g(D)$).

$a'$ est donc la similitude orthogonale d'axe $g(D)$ et de rapport $\lambda$.

Si $g$ n'est pas une similitude mais une application affine bijective, $g^{-1}ag$ est encore une affinité d'axe $g(D)$, de rapport $\lambda$ et de direction $g(D')$ si $D'$ est une droite perpendiculaire à $D$.

---

# Partie III
# Décomposition d'un endomorphisme en somme de similitudes

**L'objectif de cette partie est d'étudier la décomposition d'un endomorphisme en somme d'une similitude directe et d'une similitude indirecte et, à partir de là, de caractériser les endomorphismes symétriques, c'est-à-dire les endomorphismes $B$ tels que, pour tout couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de vecteurs, $B(\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}.B(\overrightarrow{v})$.**
**On note $\mathcal{L}(\Pi)$ l'algèbre des endomorphismes de $\Pi$.**

1. **Opération du quart de tour direct par conjugaison**
**A tout endomorphisme $F$, on associe l'endomorphisme $\sigma(F) = RFR^{-1}$.**

(a) **Vérifier que $\sigma \circ \sigma$ est l'identité de $\mathcal{L}(\Pi)$.**
Soit $F \in \mathcal{L}(\Pi)$. Alors :
$$\sigma \circ \sigma(F) = \sigma(\sigma(F)) = \sigma(RFR^{-1}) = RRFR^{-1}R^{-1}$$
Or $R^2 = (R^{-1})^2 = -I$, d'où $\sigma \circ \sigma(F) = F$. On a bien $\sigma \circ \sigma = Id_{\mathcal{L}(\Pi)}$.

(b) **Soit $\mathcal{S}_+$ (resp. $\mathcal{S}_-$) le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\Pi)$ constitué des endomorphismes $G$ tels que $\sigma(G) = G$ (resp. $\sigma(G) = -G$). Prouver que $\mathcal{L}(\Pi)$ est somme directe des sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}_+$ et $\mathcal{S}_-$, les projecteurs associés étant $F \longmapsto \frac{1}{2}\left(F + RFR^{-1}\right)$ et $F \longmapsto \frac{1}{2}\left(F - RFR^{-1}\right)$.**

Déjà, on a bien que :

$$\forall F \in \mathcal{L}(\Pi), \quad F = \frac{F + \sigma(F)}{2} + \frac{F - \sigma(F)}{2}$$

De plus, on a :

$$\sigma\left(\frac{F + \sigma(F)}{2}\right) = \frac{\sigma(F) + \sigma^2(F)}{2} = \frac{F + \sigma(F)}{2}$$

$$\sigma\left(\frac{F - \sigma(F)}{2}\right) = \frac{\sigma(F) - \sigma^2(F)}{2} = \frac{F - \sigma(F)}{2}$$

Donc $\mathcal{L}(\Pi) = \mathcal{S}_+ + \mathcal{S}_-$.

De plus, $\mathcal{S}_+ \cap \mathcal{S}_- = \{F \in \mathcal{L}(\Pi) \ / \ \sigma(F) = F \text{ et } \sigma(F) = -F\} = \{0\}$, donc $\boxed{\mathcal{L}(\Pi) = \mathcal{S}_+ \oplus \mathcal{S}_-}$, les projecteurs associés étant :

$$F \longmapsto \frac{1}{2}\left(F + \sigma(F)\right) = \frac{1}{2}\left(F + RFR^{-1}\right) \in \mathcal{S}_+$$

$$F \longmapsto \frac{1}{2}\left(F - \sigma(F)\right) = \frac{1}{2}\left(F - RFR^{-1}\right) \in \mathcal{S}_-$$

(c) **Vérifier que les éléments non nuls de $\mathcal{S}_+$ (resp. de $\mathcal{S}_-$) sont les similitudes directes (resp. indirectes).**

Soit $F$ un élément non nul de $\mathcal{S}_+$. Il vérifie $\sigma(F) = F$, c'est-à-dire $RFR^{-1} = F$, autrement dit $RF = FR$ et d'après la question I.2, c'est donc une similitude directe.

De même, un élément non nul de $\mathcal{S}_-$ est une similitude indirecte.

2. **Ecriture canonique d'un endomorphisme**

(a) **Etablir que tout endomorphisme $F$ peut s'écrire sous la forme (dite canonique)**

$$F = \alpha I + \beta R + \gamma S$$

**où $\alpha, \beta, \gamma$ sont des nombres réels, et où $S$ est une réflexion. Etudier l'unicité d'une telle écriture, en distinguant deux cas suivant que $F$ appartient à $\mathcal{S}_+$ ou non. On observera que $\gamma S = (-\gamma)(-S)$.**

Soit $F$ un endomorphisme de $\Pi$. D'après la question précédente, on a

$$F = \frac{1}{2}\left(F + RFR^{-1}\right) + \frac{1}{2}\left(F - RFR^{-1}\right)$$

avec $\frac{1}{2}\left(F + RFR^{-1}\right) \in \mathcal{S}^+$, $\frac{1}{2}\left(F - RFR^{-1}\right) \in \mathcal{S}^-$.

L'élément de $\mathcal{S}^-$ $\frac{1}{2}\left(F - RFR^{-1}\right)$ est une similitude indirecte vectorielle, donc un élément du type $\gamma S$ où $\gamma$ est un réel et $S$ est une réflexion.

L'élément de $\mathcal{S}^+$ $\frac{1}{2}\left(F + RFR^{-1}\right)$ est une similitude directe vectorielle, c'est donc la composée d'une homothétie et d'une rotation vectorielle. Or, une rotation vectorielle s'écrit $\cos\theta I + \sin\theta R$, d'où :

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \frac{1}{2}\left(F + RFR^{-1}\right) = \alpha I + \beta R$$

Etudions l'unicité d'une telle écriture.

Supposons que

$$F = \alpha I + \beta R + \gamma S = \alpha' I + \beta' R + \gamma' S'$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \in \mathbb{R}$, et $S, S'$ des réflexions. Alors, par l'unicité de la décomposition $\mathcal{L}(\Pi) = \mathcal{S}_+ \oplus \mathcal{S}_-$ (question précédente), on a :

$$\alpha I + \beta R = \alpha' I + \beta' R, \qquad \text{et} \qquad \gamma S = \gamma' S'$$

Etudions le cas $\alpha I + \beta R = \alpha' I + \beta' R$

Autrement dit, on a $(\alpha-\alpha')I+(\beta-\beta')R=0$. Or $I$ et $R$ sont deux éléments de $\mathcal{L}(\Pi)$ indépendants, d'où $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$

Etudions le cas $\gamma S=\gamma' S'$.
Remarquons déjà que $\gamma=0 \Longleftrightarrow \gamma'=0$. De plus, si $\gamma\gamma'\neq 0$, on a $SS'=\dfrac{\gamma}{\gamma'}I$. Or $SS'$ est une rotation vectorielle comme composée de deux réflexions. On a donc $\dfrac{\gamma}{\gamma'}=\pm 1$, d'où $\gamma=\gamma' \Rightarrow S=S'$ et $\gamma=-\gamma' \Rightarrow S=-S'$ et il n'y a pas unicité de la décompotition.

En conclusion : pour un élément de $\mathcal{S}_+$, la décomposition est unique. Pour un élément de $\mathcal{L}(\Pi)\backslash\mathcal{S}_+$, la décomposition n'est pas unique :

$$\alpha I+\beta R+\gamma S=\alpha I+\beta R+(-\gamma)(-S)$$

(b) **Dans ces conditions, expliciter la matrice associée à $F$ dans une base orthonormale directe $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ telle que $S(\overrightarrow{i})=\overrightarrow{i}$. Calculer le déterminant et le polynôme caractéristique de $F$ en fonction de $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$.**
Soit $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ une base orthonormale telle que $S(\overrightarrow{i})=\overrightarrow{i}$.
La matrice de $S$ dans cette base est $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, celle de $R$ est $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.
La matrice de $F$ est donc :

$$\boxed{\begin{pmatrix}\alpha+\beta & -\beta\\ \beta & \alpha-\gamma\end{pmatrix}}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\det(F)=\alpha^2-\gamma^2+\beta^2},\quad \boxed{\mathrm{tr}(F)=2\alpha}$$

Le polynôme caractéristique de $F$ est donc :

$$\boxed{X^2-2\alpha X+\alpha^2-\gamma^2+\beta^2}$$

(c) **Caractériser les triplets $(\alpha,\beta,\gamma)$ tels que $F$ soit symétrique. Préciser alors les valeurs propres et les sous-espaces propres de $F$.**
$F$ est symétrique si et seulement si la matrice de $F$ dans n'importe quelle base orthonormale de $\Pi$ est symétrique.
On a donc :

$$F \text{ symétrique } \Longleftrightarrow \beta=0 \Longleftrightarrow (\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}\times\{0\}\times\mathbb{R}$$

Les valeurs propres de $F$ sont alors $\alpha+\gamma$ et $\alpha-\gamma$ et les sous-espaces propres de $F$ sont les sous-espaces propres de $S$ définis en III.2.(a).
(En efft, la matrice de $F$ dans la base orthonormale directe $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ telle que $S(\overrightarrow{i})=\overrightarrow{i}$ est diagonale).

# Partie IV
# Décomposition des transformations symétriques ayant un point fixe

**Les transformations considérées dans cette partie ont un point fixe donné $O$. Pour tout nombre réel $\lambda$ non nul, l'homothétie de centre $O$ et de rapport $\lambda$ est notée $h_\lambda$.**

1. **Caractérisation des affinités orthogonales**

(a) **Prouver que toute affinité orthogonale $A$ est un endomorphisme symétrique.**
Soit $A$ l'affinité orthogonale d'axe $\Delta$ et de rapport $\lambda$. Soit $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ une base orthogonale directe avec $\overrightarrow{i}\in\Delta$. La matrice de $A$ dans cette base est $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$.
Montrons que $A$ est bien un endomorphisme symétrique.
Soient $\overrightarrow{u}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v}=x'\overrightarrow{i}+y'\overrightarrow{j}$.

$$A(\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v}=(x\overrightarrow{i}+\lambda y\overrightarrow{j}).(x'\overrightarrow{i}+y'\overrightarrow{j})=xx'+\lambda yy'$$

$$\overrightarrow{u}.A(\overrightarrow{v})=(x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}).(x'\overrightarrow{i}+\lambda y'\overrightarrow{j})=xx'+\lambda yy'=A(\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v}$$

(b) **Etant donné une réflexion $S$, caractériser les couples $(\alpha, \gamma)$ de nombres réels tels que $B = \alpha I + \gamma S$ soit une affinité orthogonale.**

L'endomorphisme $B = \alpha I + \gamma S$ est une affinité orthogonale si et seulement si $B$ est diagonalisable dans une base orthonormale et a 1 pour valeur propre. Nous avons vu que $\alpha I + \gamma S$ est diagonalisable dans une base orthonormale (question III.2.c)) et que ses valeurs propres sont $\alpha + \gamma$ et $\alpha - \gamma$.

Ainsi :

$$B = \alpha I + \gamma S \text{ affinité orthogonale} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 - \gamma^2 \neq 0 \\ (\alpha + \gamma - 1)(\alpha - \gamma - 1) = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\alpha - 1)^2 - \gamma^2 = 0 \\ \alpha^2 - \gamma^2 \neq 0 \end{array} \right.$$

Il faut alors supposer que l'autre valeur propre est non nulle car c'est le rapport non nul de l'affinité orthogonale.

2. **Décomposition en produit d'une affinité orthogonale et d'une homothétie.**
**Soient $b$ une transformation affine fixant $O$ et $B$ l'automorphisme associé. Prouver qu'il est équivalent de dire :**
   (a) **La transformation $b$ est symétrique, autrement dit, $B$ est symétrique.**
   (b) **La transformation $b$ peut s'écrire sous la forme $b = h_\lambda a$, où $\lambda \neq 0$ et où $a$ est une affinité orthogonale dont l'axe $D$ passe par $O$.**

**Montrer que, dans ces conditions, $\lambda$ est une valeur propre de $B$, et étudier l'unicité d'une telle décomposition, en distinguant deux cas selon que $b$ est une homothétie ou non.**

Soit $b$ une transformation affine fixant $O$ et s'écrivant sous la forme $b = h_\lambda a$ où $\lambda \neq 0$ et $a$ est une affinité orthogonale dont l'axe $D$ passe par $O$. Alors $b$ est symétrique car :

$$\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \Pi,\ B(\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \lambda A(\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{u}.A(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}.B(\overrightarrow{v})$$

car $a$ est symétrique d'après la question IV.1.a.

Réciproquement, soit $b$ une transformation affine fixant $O$ telle que $B$ l'automorphisme associé soit symétrique. On applique les résultats de la question III.3 : il existe $S$ une réflexion, et $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$B = \alpha I + \gamma S$$

($B$ est symétrique, donc $\beta = 0$).

De plus, $B$ est un automorphisme de $\Pi$, donc $(a - \gamma)(a + \gamma) = \det(B) \neq 0$.

Posons $\alpha' = \dfrac{\alpha}{\alpha + \gamma}$ et $\gamma' = \dfrac{\gamma}{\alpha + \gamma}$. Alors :

$$(\alpha' - \gamma')(\alpha' + \gamma') = \frac{1}{(\alpha + \gamma)^2}(\alpha^2 - \gamma^2) \neq 0 \quad \text{et} \quad \alpha' + \gamma' = 1$$

et $B = (\alpha + \gamma)(\alpha' I + \gamma' S) = (\alpha + \gamma)A$, où $A$ est une affinité orthogonale d'après IV.1.

Comme $b$ fixe le point $O$, on considère l'affinité orthogonale $a$ laissant le point $O$ fixe et ayant pour application linéaire associée $A$. On a :

$$b = h_{\alpha+\gamma} a$$

Nous avons donc montré l'équivalence des propositions (a) et (b). Le réel $\lambda$ trouvé est bien une valeur propre de $B$.

Etudions l'unicité d'une telle décomposition :

Supposons que $h_\lambda a = h_{\lambda'} a'$ où $a$ et $a'$ sont des affinités orthogonales dont les axes passent par $O$. Alors $h_{1/\lambda'} h_\lambda = a' a^{-1}$.

Supposons que $h_{1/\lambda'} h_\lambda$ n'est pas la transformation identique, c'est-à-dire que $\lambda \neq \lambda'$, $a \neq a'$. Alors $h_{1/\lambda'} h_\lambda$ n'a qu'un point fixe et les axes de $a'$ et de $a^{-1}$ sont donc sécants ($a^{-1}$ est aussi une affinité orthogonale, son axe est celui de $a$, son rapport l'inverse de celui de $a$)

Les deux axes se coupent donc au point fixe de l'homothétie $\Omega$.

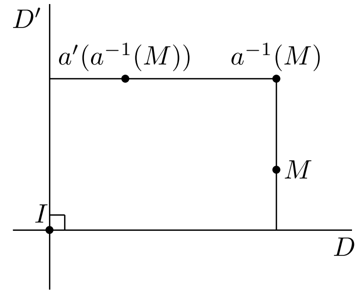
Soient $D$ et $D'$ les axes de $a$ et de $a'$. Soit $M$ un point de $D$ distinct de $D \cap D'$. On a :

$$a' a^{-1}(M) = a'(M) = h_{1/\lambda'} h_\lambda(M)$$

donc $\Omega, M, a'(M)$ sont alignés. Ceci doit être vrai pour tout point $M$ de $D$ donc :

$$\forall M \in D,\ a'(M) \in D$$

autrement dit, la droite $D$ est globalement invariante par $a'$ : ce n'est pas $D'$ car $D \neq D'$, c'est donc une droite orthogonale à $D'$.




Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base orthonormée directe telle que $D$ soit de direction $\mathbb{R}\overrightarrow{i}$, $D'$ de direction $\mathbb{R}\overrightarrow{j}$.

Soit $\mu$ le rapport de $a$, $\mu'$ le rapport de $a'$. La matrice $A'A^{-1}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est $\begin{pmatrix} \mu' & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix}$. C'est celle d'une homothétie de rapport $\lambda'^{-1}\lambda$ si et seulement si $\lambda'^{-1}\lambda = \mu' = \mu^{-1}$.

En conclusion : on a $h_\lambda a = h_{\lambda'} a'$ si et seulement si ($\lambda = \lambda'$ et $a = a'$) ou ($a$ et $a'$ ont des axes orthogonaux et des rapports inverses l'un de l'autre).

Donc si $b$ est une homothétie, $b$ s'écrit de manière unique $b = h_\lambda$.

3. **Décomposition en produit de deux affinités orthogonales**
   **Prouver qu'il ext équivalent de dire :**
   (a) **La transformation $b$ est symétrique.**
   (b) **La transformation $b$ peut s'écrire sous la forme $f = a_2 a_1$, où $a_1$ et $a_2$ sont des affinités orthogonales dont les axes $D_1$ et $D_2$ sont orthogonaux et passent par $O$.**

   **Préciser alors les droites $D_1$ et $D_2$ ainsi que les rapports $\lambda_1$ et $\lambda_2$ de ces affinités.**

   Soit $b$ une transformation telle que $b = a_2 a_1$ où $a_1$ et $a_2$ sont des affinités orthogonales dont les axes sont orthogonaux et passent par $O$.

   Pour montrer que $b$ est symétrique, il suffit de montrer que $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \Pi,\ B(\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}.B(\overrightarrow{v})$.

   Or, $B(\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = A_2 A_1(\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = A_2(A_1(\overrightarrow{u})).\overrightarrow{v} = A_1(\overrightarrow{u}).A2(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}.A_1(A_2(\overrightarrow{v}))$.

   Donc $B(\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}.B(\overrightarrow{v})$.

   Réciproquement, soit $b$ une transformation affine ayant $O$ pour point fixe. $b$ est supposée symétrique, donc par la question précédente, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$, il existe $a$ affinité orthogonale d'axe $D$ avec $O \in D$ tels que $b = h_\lambda a$.

   Or, nous avons vu à la question précédente que si $D'$ est la perpendiculaire à $D$ contenant $O$, on a $h_\lambda = a'_1 a'_2$ où $a'_1$ affinité orthogonale de rapport $\lambda$, d'axe $D'$ et $a'_2$ affinité orthogonale de rapport $\lambda^{-1}$ d'axe $D$. D'où

   $$b = a'_1 a'_2 a = a'_1(a'_2 a)$$

   et $a'_2 a$ est l'affinité orthogonale de rapport $\lambda^{-1}\mu$ d'axe $D$, $\mu$ étant le rapport de l'affinité orthogonale $a$.

   Remarquons alors que $D$ et $D'$ sont globalement invariantes par $b$ et que leurs directions correspondent donc aux sous-espaces propres de $B$ déterminés à la question III.2.c. De plus, les rapports de $a_1$ et de $a_2$ sont les valeurs propres de $B$.

---

# Partie V
# Décomposition des transformations ayant un point fixe

**Dans les cinq premières questions de cette partie, on étudie une tranformation affine $f$ ayant un point fixe $O$ en exploitant l'écriture canonique de $F$.**

1. **Décomposition en produit d'une réflexion et d'une transformation symétrique**.
   (a) **Déterminer toutes les réflexions $S_1$ telles que $FS_1$ soit symétrique. A cet effet, on pourra utiliser l'écriture canonique de $F$ et on distinguera deux cas selon que $F$ est une similitude directe ou non.**
   Soit $F$ un endomorphisme de $\Pi$. Par la question III.2.a, il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ et $S$ une réflexion tels que

   $$F = \alpha I + \beta R + \gamma S$$

Soit $S_1$ une réflexion :

$$FS_1 = \alpha S_1 + \gamma SS_1 + \beta RS_1$$

Remarquons que :

$$(\gamma SS_1)R = \gamma S(S_1R) = \gamma S(-RS_1) = -\gamma(SR)S_1 = -\gamma(-RS)S_1$$

car $S$ et $S_1$ sont des automorphismes associés à des similitudes indirectes d'où $(\gamma SS_1)R = R(\gamma SS_1)$
Cependant, on a :

$$(\alpha S_1 + \beta RS_1)R = \alpha S_1R + \beta RS_1R = -\alpha RS_1 - \beta R^2S_1 = -R(\alpha S_1 + \beta RS_1)$$

ainsi, dans la décomposition sur $\mathcal{S}_- \oplus \mathcal{S}_+$, on a :

$$\alpha S_1 + \beta RS_1 \in \mathcal{S}_-, \qquad \gamma SS_1 \in \mathcal{S}_+$$

$FS_1$ est symétrique si et seulement si $\gamma SS_1$ est proportionnel à l'identité d'après III.2.c), donc si et seulement si lorsque $\gamma \neq 0$, $SS_1 = \varepsilon Id$, $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, car $SS_1$ est une rotation vectorielle comme produit de deux réflexions, donc $S_1 = \varepsilon S$.

En conclusion : si $F$ est une similitude directe (ie $\gamma = 0$ dans la décomposition de IV.2) quelle que soit la réflexion $S_1$, $FS_1$ est symétrique.
Si $F = \alpha I + \beta R + \gamma S$ avec $\gamma \neq 0$, alors $FS$ et $F(-S)$ sont les seules réflexions $S_1$ telles que $FS_1$ soit symétrique.

(b) **En déduire que $f$ peut s'écrire sous la forme $f = bs$, où $b$ est symétrique et fixe $O$, et où $s$ est une réflexion dont l'axe passe par $O$. Etudier l'unicité d'une telle décomposition.**
Nous avons toujours trouvé une réflexion $S_1$ telle que $FS_1$ soit symétrique. Soit $s$ la réflexion fixant $O$ et d'automorphisme associé $S_1$. Alors $fs$ est une transformation affine symétrique $b$ et $f = bs$, $s$ réflexion dont l'axe passe par $O$.

Etudions l'unicité d'une telle décomposition.
Si $f$ est une similitude directe, toute réflexion dont l'axe passe par $O$ conduit à une telle décomposition.
Si $f$ n'est pas une similitude directe, on a $f = bs = (-b)(-s)$ car pour $S_1$ on a deux choix possibles.

2. **Décomposition en produit d'une similitude indirecte et d'une affinité orthogonale**.
**Etablir que $f$ peut s'écrire sous la forme $f = ag$, où $a$ est une affinité orthogonale dont l'axe passe par $O$, et où $g$ est une similitude indirecte de centre $O$. Etudier l'unicité d'une telle décomposition lorsque $f$ n'est pas une similitude. Examiner aussi les cas où $f$ est une similitude indirecte, ou directe.**

Nous avons montré que si $b$ est une transformation affine symétrique fixant $O$, il existe $\lambda \neq 0$ et $a$ une affinité orthogonale dont l'axe passe par $O$ tels que $b = h_\lambda a$, d'où $f = h_\lambda as = ah_\lambda s = ag$ où $g = h_\lambda s$ est une similitude indirecte de centre $O$.

Etudions l'unicité d'une telle décomposition
1er cas : $f$ n'est pas une similitude : $f = ag = a'g'$ avec $g = h_\lambda s$, $g' = h_{\lambda'}s'$, $s$ et $s'$ deux réflexions dont les axes passent par $O$, $a$ et $a'$ distinctes de l'identité.
Ainsi, $h_\lambda as = h_{\lambda'}a's'$ donc $s' = \pm s$ par l'unicité de V.1.b ($h_\lambda a$ n'est pas une similitude directe).
Donc $h_\lambda a = h_{\varepsilon\lambda'}a'$ et par IV.2, on a doit $\lambda = \varepsilon\lambda'$ et $a = a'$, soit $a$ et $a'$ ont des axes orthogonaux et des rapports inverses l'un de l'autre.

2ème cas : $f$ est une similitude.
Si $f$ est une similitude directe, il n'y a pas d'unicité mais infinité de solutions qui proviennent de l'étude de V.1.b.
Si $f$ est une similitue indirecte, $f = ag = a'g'$ implique que $a = fg^{-1}$ est une similitude directe donc l'identité d'où $f = g$ et il y a unicité de la décomposition.

3. **Interprétation géométrique de cette dernière décomposition**
**Dans cette question, on suppose que $f$ n'est pas une similitude, et on fixe une base orthonormale directe $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.**

(a) **Prouver que la recherche d'un couple $(a,g)$ tel que $f = ag$ équivaut à celle d'une affinité orthogonale $A = \alpha' I + \gamma' S'$, et d'une base carrée directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ telles que $A(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{u}$ et $A(\overrightarrow{j}) = -\overrightarrow{v}$, où $\overrightarrow{u} = F(\overrightarrow{e_1})$ et $\overrightarrow{v} = F(\overrightarrow{e_2})$.**

Comme $f, a, g$ fixent le point $O$, il suffit d'étudier les automorphismes associés $F, A, G$. $A$ est une affinité orthogonale donc :

$$\exists \alpha', \gamma' \in \mathbb{R},\ \exists S' \text{ réflexion } / \quad A = \alpha' I + \gamma' S'$$

$G$ est une similitude indirecte donc $(G(\overrightarrow{e_1}), G(\overrightarrow{e_2}))$ est une base carrée indirecte.
Posons $\overrightarrow{u} = F(\overrightarrow{e_1})$ et $\overrightarrow{v} = F(\overrightarrow{e_2})$. Alors :

$$A(G(\overrightarrow{e_1})) = \overrightarrow{u}, \quad A(G(\overrightarrow{e_2})) = \overrightarrow{v}$$

donc si on considère la base carrée directe $(G(\overrightarrow{e_1}), -G(\overrightarrow{e_2})) = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on a $A(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{u}$ et $A(\overrightarrow{j}) = -\overrightarrow{v}$.

(b) **En appliquant à $A$ les résultats de III.1., montrer que $\overrightarrow{i}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u} + R(\overrightarrow{v})$ et que $S'(\overrightarrow{i})$ est colinéaire à $\overrightarrow{u} - R(\overrightarrow{v})$.**
Nous avons trouvé dans la Partie III la décomposition d'un élément de $\mathcal{L}(\pi)$ sur $\mathcal{S}_- \oplus \mathcal{S}_+$. Ici :

$$\alpha' I = \frac{1}{2}(A + RAR^{-1}), \qquad \gamma' S' = \frac{1}{2}(A - RAR^{-1})$$

d'où $\alpha' \overrightarrow{i} = \frac{1}{2}\left(A(\overrightarrow{i}) + RAR^{-1}(\overrightarrow{i})\right)$.
Or, $R^{-1}(\overrightarrow{i}) = -\overrightarrow{j}$, $A(\overrightarrow{j}) = -\overrightarrow{v}$ et $\alpha' \overrightarrow{i} = \frac{1}{2}(R(\overrightarrow{v}) + \overrightarrow{u})$ et $\overrightarrow{i}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u} + R(\overrightarrow{v})$.

$$\gamma' S'(\overrightarrow{i}) = \frac{1}{2}(A(\overrightarrow{i}) - RAR^{-1}(\overrightarrow{i})) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{u} - RA(-\overrightarrow{j})) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{u} - R(\overrightarrow{v}))$$

et $S'(\overrightarrow{i})$ est colinéaire à $\overrightarrow{u} - R(\overrightarrow{v})$.

(c) **Lorsque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont les vecteurs indiqués dans la question I.4., déterminer tous les triplets $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ satisfaisant aux conditions précédentes. Pour chacun d'eux, reprendre la figure du I.4., expliciter $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ ainsi que l'axe de $A$, et donner le rapport de $A$.**
D'après la question précédente, $\exists \delta \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{i} = \delta(\overrightarrow{u} + R(\overrightarrow{v}))$.
(En effet, si $\overrightarrow{i} \neq \overrightarrow{0}$, on a alors $\delta \neq 0$)
En utilisant le fait que $(O, \overrightarrow{u} + R(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{v} - R(\overrightarrow{u}))$ est un repère carré indirect, on a $\overrightarrow{j} = \delta(R(\overrightarrow{u}) - \overrightarrow{v})$.
On reprend l'exemple du I.4, le plan étant rapporté au repère orthonormal $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ et $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{v} = 6\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$.

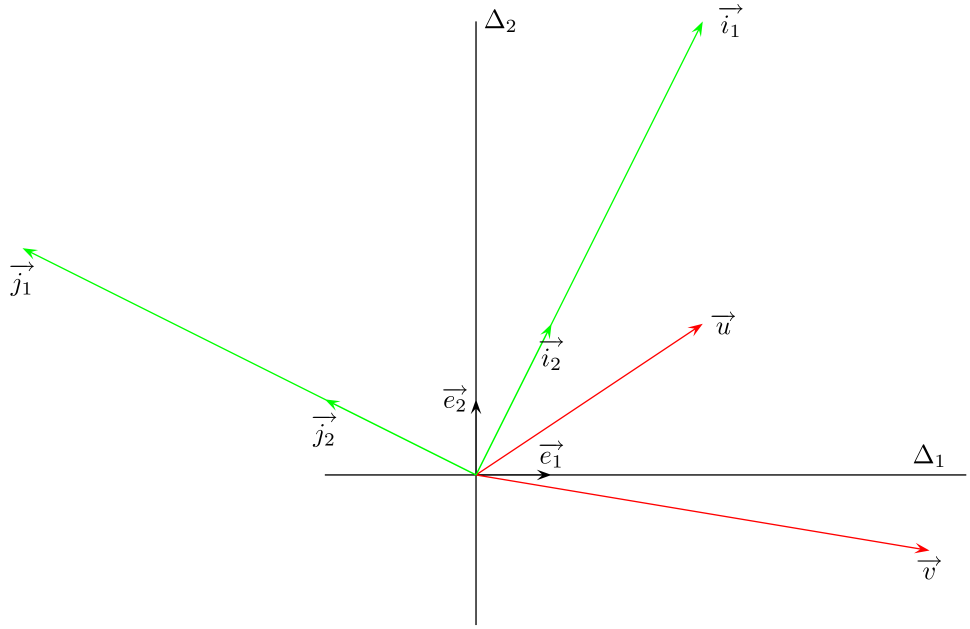
$$\exists \delta \in \mathbb{R}^* \ / \ \overrightarrow{i} = \delta(4\overrightarrow{e_1} + 8\overrightarrow{e_2}), \quad \overrightarrow{j} = \delta(-8\overrightarrow{e_1} + 4\overrightarrow{e_2})$$

$A(\overrightarrow{i}) = 3\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}$, $A(\overrightarrow{j}) = -6\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$.
On peut déterminer la matrice de $A$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
En effet, $2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} = 20\delta\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} = 20\delta\overrightarrow{e_1}$.
Donc

$$A(20\delta\overrightarrow{e_1}) = A(\overrightarrow{i}) - 2A(\overrightarrow{j}) = 15\overrightarrow{e_1}, \qquad A(20\delta\overrightarrow{e_2}) = 2A(\overrightarrow{i}) + A(\overrightarrow{j}) = 5\overrightarrow{e_2}$$

et $A$ a pour matrice $\begin{pmatrix} \frac{3}{4\delta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4\delta} \end{pmatrix}$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
C'est la matrice d'une affinité si et seulement si l'une de ses valeurs propres est 1 et l'autre est non nulle.
On a donc deux cas possibles :
1er cas : $\delta = \frac{3}{4}$, $A(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1}$, $A(\overrightarrow{e_2}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{e_2}$.
$A$ a pour axe la droite $\Delta_1(O, \overrightarrow{e_1})$, pour rapport $\frac{1}{3}$ et le couple $(\overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1})$ correspondant est : $(3\overrightarrow{e_1} + 6\overrightarrow{e_2}, -6\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2})$

2eme cas : $\delta = \frac{1}{4}$, $A(\overrightarrow{e_1}) = 3\overrightarrow{e_1}$, $A(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_2}$.
$A$ a pour axe la droite $\Delta_2(O, \overrightarrow{e_2})$, pour rapport 3 et le couple $(\overrightarrow{i_2}, \overrightarrow{j_2})$ correspondant est : $(\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}, -2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2})$




4. **Décomposition en produit d'affinités orthogonales.**
   **Montrer que $f$ peut s'écrire sous la forme $f = a_2 a_1 s$, où $a_1$ et $a_2$ sont des affinités orthogonales d'axes orthogonaux passant par $O$, et $s$ est une réflexion d'axe passant par $O$.**

   On utilise la décomposition de V.1.b : $f = bs$ avec $b$ symétrique et fixant $O$, $s$ réflexion dont l'axe passe par $O$.
   Egalement, on a la décomposition de $IV.3$ pour une transformation $b$ symétrique fixant $O$ : $b = a_2 a_1$, où $a_1$ et $a_2$ sont des affinités orthogonales dont les axes $D_1$ et $D_2$ sont orthogonaux et passent par $O$.
   Pour $f$ transformation affine fixant $O$, on a $f = a_2 a_1 s$ où $a_1$ et $a_2$ sont des affinités orthogonales d'axes orthogonaux passant par $O$ et $s$ une réflexion d'axe passant par $O$.

5. **Existence d'une décomposition en produit de deux affinités orthogonales.**
   **L'objectif est de caractériser les automorphismes $F$ qui peuvent s'écrire comme produit de deux affinités orthogonales. A cet effet, on écrit $F$ sous la forme canonique $F = \alpha I + \beta R + \gamma S$. Le cas des endomorphismes symétriques étant déjà traité, on suppose que $\beta \neq 0$.**

   (a) **En écrivant les affinités sous forme canonique, étudier le cas où $F$ est une similitude directe, c'est-à-dire où $\gamma = 0$. Désormais, on écartera ce cas.**

   On remarque qu'une affinité orthogonale vectorielle d'axe $\Delta$ peut s'écrire si $S$ désigne la réflexion d'axe $\Delta$ : $(1-\lambda)I + \lambda S$, et son rapport est $1 - 2\lambda$, avec $\lambda \neq \dfrac{1}{2}$.
   Soit $F$ une similitude directe : $F = \alpha I + \beta R$.

   $$((1-\lambda)I + \lambda S)\,((1-\lambda')I + \lambda' S') = F \quad \Longleftrightarrow \quad (1-\lambda)(1-\lambda')I + \lambda\lambda' SS' + \lambda'(1-\lambda)S' + \lambda(1-\lambda')S = F$$

   On remarque que $(1-\lambda)(1-\lambda')I + \lambda\lambda' SS'$ est égale à la composante de $F$ dans $\mathcal{S}_+$ car :

   $$(\lambda\lambda' SS')R = \lambda\lambda' S(S'R) = \lambda\lambda' S(-RS') = \lambda\lambda'(-SR)S' = \lambda\lambda'(RS)S' = R(\lambda\lambda' SS')$$

   d'où nécessairement :

   $$\lambda'(1-\lambda)S' + \lambda(1-\lambda')S = 0, \qquad \lambda'(1-\lambda)S' = -\lambda(1-\lambda')S$$

   Les cas où $S = \pm S'$ ne sont pas intéressants car ils conduisent à $F$ homothétie ($S = -S'$, $\lambda = \lambda'$ donne $(1-2\lambda)I$ donc toutes les homothéties).
   Etudions les cas où $\lambda'(1-\lambda) = \lambda(1-\lambda') = 0$.
   Si $\lambda' = 0$, on a $\lambda = 0$ et $F = I$
   Si $\lambda' = 1$, on a $\lambda = 1$ et $F = SS'$ donc toute rotation vectorielle.

   En conclusion, toute rotation vectorielle et toute homothétie s'écrit comme produit de deux affinités orthogonales vectorielles.

(b) **Soit $R_\theta$ une rotation. Prouver que l'existence d'une décomposition de $F$ équivaut à celle d'une décompositition de $R_\theta F R_\theta^{-1}$.**

Si $F = A_1A_2$, on a $R_\theta F R_\theta^{-1} = (R_\theta A_1 R_\theta^{-1})(R_\theta A_2 R_\theta^{-1})$ et $R_\theta A R_\theta^{-1}$ est une affinité orthogonale (les valeurs propres de $A$ et de $R_\theta A R_\theta^{-1}$ sont les mêmes, les sous-espaces propres sont images l'un de l'autre par $R_\theta$ qui conserve l'orthogonalité).

De la même façon, si $R_\theta F R_\theta^{-1} = A_1A_2$, on a $F = (R_\theta^{-1}A_1R_\theta)(R_\theta^{-1}A_2R_\theta)$.

(c) **Calculer $R_\theta F R_\theta^{-1}$. En déduire que $F' = \alpha' I + \beta' R + \gamma' S'$ est conjugué de $F$ par rotation si et seulement si $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, et $\gamma' = \pm\gamma$, c'est-à-dire si $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$ et $\det(F') = \det(F)$. On posera désormais $\delta = \det(F)$.**

Soit $F = \alpha I + \beta R + \gamma S$, avec $\beta \neq 0$ et $\gamma \neq 0$.
Alors, puisque $RR_\theta = R_\theta R$, on a

$$R_\theta F R_\theta^{-1} = \alpha I + \beta R + \gamma R_\theta S R^{-1} = \alpha I + \beta R + \gamma S_1 \qquad \text{avec } S_1 = R_\theta S R_\theta^{-1}$$

donc $F'$ est conjugué de $F$ par rotation si et seulement si $\alpha I + \beta R = \alpha' I + \beta' R$ et $\gamma S_1 = \gamma' S'$.
$F'$ conjugué de $F \Longrightarrow\ \alpha = \alpha',\ \beta = \beta',\ \gamma = \pm\gamma'$.

Réciproquement, si $\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \pm\gamma'$, on a :

$$\forall R_\theta, \quad R_\theta(\alpha I + \beta R)R_\theta^{-1} = \alpha' I + \beta' R$$

Si $\gamma' = \gamma$, $\exists R_\theta$ tel que $S' = R_\theta S R_\theta^{-1}$ où $R_\theta$ est une rotation qui envoie l'axe de $S$ sur l'axe de $S'$.
Si $\gamma' = -\gamma$, $\exists R_\theta$ tel que $-S' = R_\theta S R_\theta^{-1}$ où $R_\theta$ est une rotation qui envoie l'orthogonal de l'axe de $S$ sur l'axe de $S'$.

$$\alpha' = \alpha,\ \beta' = \beta,\ \gamma' = \pm\gamma \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 - \gamma'^2 = \det(F) = \det(F') \\ \alpha = \alpha', \beta = \beta' \end{cases}$$

(d) **Vu ces résultats, on est ramené au problème suivant : existe-t-il des affinités orthogonales $A_1$ et $A_2$ telles que l'automorphisme $F' = A_2A_1$ satisfasse aux conditions énoncées au $c$ ? Soient alors $\lambda_1$ et $\lambda_2$ les rapports de $A_1$ et $A_2$, $D_1$ et $D_2$ leurs axes et $\varphi$ une mesure de l'angle $(D_1, D_2)$. En écrivant $A_1$ et $A_2$ sous forme canonique, montrer que tout revient à déterminer un triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \varphi)$ de nombres réels tels que**

$$\begin{cases} \lambda_1\lambda_2 = \delta \\ (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\sin^2\varphi = \delta - 2\alpha + 1 \\ (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\sin\varphi\cos\varphi = 2\beta \end{cases}$$

Soit $A$ l'affinité orthogonale d'axe $\Delta$ et de rapport $\lambda$. Alors $A = \dfrac{1+\lambda}{2}I + \dfrac{1-\lambda}{2}S$ si $S$ est la réflexion vectorielle d'axe $\Delta$.
En effet, soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base orthonormale directé telle que $\Delta = \mathbb{R}\overrightarrow{i}$.

$$A(\overrightarrow{i}) = \frac{1+\lambda}{2}\overrightarrow{i} + \frac{1-\lambda}{2}\overrightarrow{i} = \overrightarrow{i}, \qquad A(\overrightarrow{j}) = \frac{1+\lambda}{2}\overrightarrow{j} - \frac{1-\lambda}{2}\overrightarrow{j} = \lambda\overrightarrow{j}$$

Soit $S_1$ la réflexion d'axe $D_1$, $S_2$ la réflexion d'axe $D_2$ :

$$\begin{aligned} F' = A_2A_1 &= \left(\frac{1+\lambda_2}{2}I + \frac{1-\lambda_2}{2}S_2\right)\left(\frac{1+\lambda_1}{2}I + \frac{1-\lambda_1}{2}S_1\right) \\ &= \frac{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)}{4}I + \frac{(1-\lambda_2)(1-\lambda_1)}{4}S_2S_1 + \frac{(1+\lambda)(1-\lambda_1)}{2}S_1 + \frac{(1-\lambda_2)(1+\lambda_1)}{2}S_2 \end{aligned}$$

Comme $\varphi = (D_1, D_2)$, alors $S_2S_1 = \cos 2\varphi I + \sin 2\varphi R$.

$$\begin{aligned} A_1A_2 &= \frac{(1+\lambda_1)(1-\lambda_2) + \cos 2\varphi(1-\lambda_2)(1-\lambda_1)}{4}I + \frac{(1-\lambda_2)(1-\lambda_1)\sin 2\varphi}{4}R \\ &\quad + \frac{(1+\lambda_2)(1-\lambda_1)}{2}S_1 + \frac{(1-\lambda_2)(1+\lambda_1)}{2}S_2 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} A_1A_2 = F' \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \det(F') = \det(A_1)\det(A_2) \\ (1+\lambda_1)(1+\lambda_2) + \cos 2\varphi(1-\lambda_2)(1-\lambda_1) = 4\alpha \\ (1-\lambda_2)(1-\lambda_1)\sin 2\varphi = 4\beta \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad (1+\lambda_1)(1+\lambda_2) + \cos 2\varphi(1-\lambda_2)(1-\lambda_1) = 4\alpha \\ &\Longleftrightarrow \quad 1 + (\lambda_1+\lambda_2) + \lambda_1\lambda_2 + (1-\sin^2\varphi)(1-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_1\lambda_2) = 4\alpha \\ &\Longleftrightarrow \quad (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\sin^2\varphi - \delta - 2\alpha + 1 \end{aligned}$$

d'où le résultat.

(e) **On pose $\tau = \delta - 2\alpha + 1$. Montrer que $\tau = 0$ si et seulement si $1$ est valeur propre de $F$, et que, dans ce cas, la décomposition est impossible.**
Supposons que $\tau = 0$. Alors $(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\sin^2\varphi = 0$, donc $\lambda_1 = 1$ ou $\lambda_2 = 1$ ou $\sin^2\varphi = 0$
Si $\lambda_1 = 1$, on a $A_1 = I$, $F = A_2$ et 1 est valeur propre de $F$.
Si $\lambda_2 = 1$, on a $A_2 = I$, $F = A_1$ et 1 est valeur propre de $F$.
Si $\sin^2\varphi = 0$, on a $\varphi = 0$ ou $\pi$, d'où $D_1 = D_2$ : 1 est valeur propre de $F$ car dans ce cas $A_2A_1$ est une affinité orthogonale.

Réciproquement si 1 est valeur propre de $F$, l'autre valeur propre de $F$ est $\delta$ car le déterminant de $F$ est égal au produit des valeurs propres. Cherchons la trace de $F$ : c'est $1+\delta$ et c'est aussi $2\alpha$ car $tr(R) = 0$, $tr(S) = 0$. Donc $1+\delta = 2\alpha$, donc $\tau = 0$.

Lorsque $\tau = 0$, le produit $A_2A_1$ est une affinité orthogonale, cas d'un endomorphisme symétrique ($\beta = 0$) déjà traité

(f) **On écarte désormais ce cas, et on prend $\varphi$ tel que $\tan\varphi = \dfrac{\tau}{2\beta}$. Calculer $\lambda_1 + \lambda_2$ en fonction de $\beta, \delta$ et $\tau$ et en déduire la condition d'existence d'un couple $(\lambda_1, \lambda_2)$ de nombres réels satisfaisant aux conditions du $d$.**
Posons $\tan\varphi = \dfrac{\tau}{2\beta}$. Ceci détermine $\varphi$. On obtient alors :

$$\lambda_1\lambda_2 = \delta, \qquad \text{et} \quad 1 - (\lambda_1+\lambda_2) + \lambda_1\lambda_2 = \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{\tau}{2\beta}\right)^2}\right)(\delta - 2\alpha + 1)$$

d'où

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 + \delta - \left(\frac{4\beta^2}{\tau^2} + 1\right)(\delta - 2\alpha + 1) = 2\alpha - \frac{4\beta^2}{\tau}$$

$\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont donc racines de l'équation du second degré $X^2 - \left(2\alpha - \dfrac{4\beta^2}{\tau}\right)X + \delta = 0$

On a $\Delta = \left(2 - \dfrac{4\beta^2}{\tau}\right)^2 - 4\delta = 4\left(\left(\alpha - \dfrac{2\beta^2}{\tau}\right)^2 - \delta\right)$.

La condition d'existence d'un couple de réels satisfaisant aux conditions du $d$ est donc $\left(\alpha - \dfrac{2\beta^2}{\tau}\right)^2 - \delta \geq 0$.

Dans ce cas, $\lambda_1$ et $\lambda_2$ existent et donc $A_1$ et $A_2$.

6. **Etudier enfin les décompositions d'une transformation affine quelconque $f$. On établira d'abord que $f$ admet un point fixe et un seul si et seulement si $1$ n'est pas valeur propre de $F$, c'est-à-dire si $\tau \neq 0$.**
Soit $f$ une transformation afine quelconque. Etudions l'unicité d'un point fixe pour $f$.
Si $f$ admet un point fixe et un seul $M_0$ : $f(M_0) = M_0$. L'ensemble des points fixes de $f$ est :

$$\{M \ / \ f(M) = M\} = \{M \ / \ f(M) - F(M_0) = M - M_0\} = \{M \ / \ F(\overrightarrow{M_0M}) = \overrightarrow{M_0M}\} = M_0 + \mathrm{Ker}(F - I)$$

Si cet ensemble se réduit à $M_0$, $\mathrm{Ker}(F - I) = \{0\}$, c'est-à-dire 1 n'est pas valeur propre de $F$.
Réciproquement si 1 n'est pas valeur propre de $F$. Alors l'ensemble des points fixes de $f$ sera l'ensemble vide ou réduit à un point. Montrons qu'il existe un point fixe $M_0$. Soit $M$ un point de $P$ : $M_0$ point fixe de $f$ si et seulement si

$$f(M_0) = M_0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{Mf(M_0)} = \overrightarrow{MM_0} \Longleftrightarrow \overrightarrow{Mf(M)} + F(\overrightarrow{MM_0} = \overrightarrow{MM_0} \Longleftrightarrow (F - I)(\overrightarrow{MM_0} = \overrightarrow{f(M)M}$$

or, si $F$ n'a pas 1 pour valeur propre, $F - I$ est inversible, on peut donc déterminer $\overrightarrow{MM_0}$ :

$$\overrightarrow{MM_0} = (F - I)^{-1}(\overrightarrow{f(M)M})$$

et $f$ admet un point fixe.
On a finalement démontré le résultat :

$f$ admet un point fixe et un seul si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de $F$

L'étude de la décomposition d'une transformation affine $f$ peut donc se faire en plusieurs temps :

- On étudie une transformation affine admettant au moins un point fixe : par $V-4$, une telle transformation affine se décompose en produit de trois affinités orthogonales. Dans le cas où 1 n'est pas valeur propre de $F$ et lorsque $\left(\alpha - \frac{2\beta^2}{\tau}\right)^2 - \delta \geq 0$, une telle transformation affine se décompose en produit de deux affinités orthogonales.
- On étudie une transformation affine $f$ n'admettant pas de point fixe : on peut à l'aide d'une affinité orthogonale se ramener à une transformation affine admettant un point fixe : $\exists a$, affinité orthogonale telle que $a \circ f = g$, $g$ admette un point fixe. On applique alors les résultats pour les transformations affines admettant un point fixe.