Devoir pour le 22 Octobre

Problème 1 (Partiel Avr.2006)

Soient E un plan affine de direction $\overrightarrow{E}$, muni d'un produit scalaire $< .|. >$ et h, h' deux homothéties de E de rapports respectifs $\rho \neq 1$ et $\rho' \neq 1$ et de centres I, I' avec $I \neq I'$.

1. (a) Montrer que $\forall M \in E \backslash \{I\}$, I appartient à la droite $(Mh(M))$.
   (b) On suppose $\rho\rho' \neq 1$. Montrer que le centre I'' de l'homothétie $h \circ h'$ appartient à la droite (II').
   (On ne demande pas d'expliciter I'')
2. (a) Soient $\mathcal{C} = \{M \in E \ / \ < \overrightarrow{\Omega M} | \overrightarrow{\Omega M} >= R^2\}$ le cercle de centre Ω et de rayon R et h une homothétie de E (de centre I et de rapport ρ). Montrer que $h(\mathcal{C})$ est un cercle dont on déterminera le cercle et le rayon.
   (b) Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de E de centres Ω et Ω' et de rayons R et R' avec $R \neq R'$. Montrer qu'il y a exactement deux homothéties $h^{\pm}$ (h^+ de rapport positif et h^- de rapport négatif) telles que $h^{\pm}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$.
   (c) En considérant les images $h^{\pm}(D)$ de la droite D de la figure 1 de l'Annexe, donner une construction géométrique simple des centres $I^{\pm}$ des homothéties $h^{\pm}$
3. On considère à présent trois cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ de E de centres et de rayons respectifs Ω_1, Ω_2, Ω_3 ; R_1, R_2, R_3 (centres et rayons deux à deux distincts). Soient $h_i^{\pm}$, $1 \leq i \leq 3$, les homothéties telles que

$$h_3^{\pm}(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2, \quad h_1^{\pm}(\mathcal{C}_2) = \mathcal{C}_3, \quad h_2^{\pm}(\mathcal{C}_3) = \mathcal{C}_1$$

   On notera $I_i^{\pm}$ les centres de $h_i^{\pm}$, $1 \leq i \leq 3$
   (a) Représenter les six centres d'homothéties $I_i^{\pm}$ sur la figure 2 de l'Annexe.
   (b) Déterminer $h_2^+ \circ h_1^- \circ h_3^-$.
   (c) En déduire que les points I_1^-, I_2^+, I_3^- sont alignés.
   (d) En procédant par analogie, montrer que les points I_1^+, I_2^+, I_3^+ sont alignés.

Problème 2 (Partiel Nov.2006)

On considère l'espace affine $\mathbb{R}^3$. Un triplet (D_1, D_2, D_3) de droites affines de $\mathbb{R}^3$ de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ esr appelé un **triplexe** si :

(i) $D_1 \cap D_2 = D_1 \cap D_3 = D_2 \cap D_3 = \emptyset$

(ii) $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

Partie I

Dans cette partie, on se propose d'étudier l'opération du groupe affine $GA(\mathbb{R}^3)$ sur l'ensemble des triplexes de $\mathbb{R}^3$.
Par convention, si A désigne un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$, on notera $\overrightarrow{A}$ sa direction.

1. Montrer que l'image $\big(f(D_1), f(D_2), f(D_3)\big)$ de tout triplexe (D_1, D_2, D_3) par une bijection affine $f \in GA(\mathbb{R}^3)$ est encore un triplexe.
2. Rappeler une condition nécessaire et suffisante pour que deux sous-espaces affines A et A' de $\mathbb{R}^3$ soient d'intersection non vide.
3. Pour un triplexe (D_1, D_2, D_3), on désigne par $P_{i,j}$ $(i < j)$ le plan affine contenant D_i et de direction $\overrightarrow{P_{i,j}} = \overrightarrow{D_i} + \overrightarrow{D_j}$.
   (a) Montrer que D_1 coupe $P_{2,3}$ en un point a_1, que D_2 coupe $P_{1,3}$ en un point a_2 et que D_3 coupe $P_{1,2}$ en un point a_3.
   (b) Montrer qu'il existe trois vecteurs $\overrightarrow{v_i} \in \overrightarrow{D_i}$, $1 \leq i \leq 3$, tels que
   $$\overrightarrow{a_1 a_2} = \overrightarrow{v_3} \quad , \quad \overrightarrow{a_1 a_3} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$$
   (On pourra observer qu'on a aussi $a_2 \in P_{2,3}$, $a_1 \in P_{1,3}$, et $a_1 \in P_{1,2}$)
   Montrer ensuite que $\overrightarrow{v_i} \neq \overrightarrow{0}$, $1 \leq i \leq 3$.

   Pour la suite, on notera $\mathcal{R}_{(D_1,D_2,D_3)}$ la base affine $(a_1, a_1+\overrightarrow{v_1}, a_1+\overrightarrow{v_2}, a_1+\overrightarrow{v_3})$ ainsi construite.
4. Soient (D'_1, D'_2, D'_3) un second triplexe, $P'_{i,j}$, $(i < j)$, (resp. a') les plans (resp. les points d'intersection) définis comme à la question 3.
   On suppose que f est une bijection affine telle que $f(D_i) = D'_i$, pour $i = 1..3$.
   (a) Montrer que $f(P_{i,j}) = P'_{i,j}$
   (b) Montrer que $f(a_i) = a'_i$ pour $i = 1..3$.
   (c) Montrer que $f\left(\mathcal{R}_{(D_1,D_2,D_3)}\right) = \mathcal{R}_{(D'_1,D'_2,D'_3)}$.
   (On pourra calculer $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a_1 a_2})$ et $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a_1, a_3})$)
   (d) En déduire qu'il existe au plus une bijection affine f telle que $f(D_i) = D'_i$, $i = 1..3$.
5. Montrer à l'aide des questions précédentes que l'opération du groupe affine sur l'ensemble $\mathcal{T}$ des triplexes, définie par :
   $$\varphi : \begin{array}{ccc} GA(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{T} & \longrightarrow & \mathcal{T} \\ (f, (D_1, D_2, D_3)) & \longmapsto & (f(D_1), f(D_2), f(D_3)) \end{array}$$
   est une opération simple et transitive.
6. Peut-on aussi conclure qu'il en est de même si on se place dans un espace affine réel quelconque de dimension 3 ? Justifier votre réponse.

Partie II

Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère le cube $\mathcal{C}$ défini par

$$\mathcal{C} = \{(x_1, x_2, x_3) \ / \ \forall i = 1..3, 0 \leq x_i \leq 1\}$$

Pour la suite du problème, on fixe un triplexe de référence $(D_i)_{i=1..3}$ en choisissant trois arêtes du cube C comme suit :

- D_1 est la droite affine passant par $(0,0,1)$ et dirigée par $\overrightarrow{e_1}$.
- D_2 est la droite affine passant par $(1,0,0)$ et dirigée par $\overrightarrow{e_2}$.
- D_3 est la droite affine passant par $(0,1,0)$ et dirigée par $\overrightarrow{e_3}$.

On se propose dans cette partie d'étudier l'ensemble des bijections affines qui stabilisent la réunion $T = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ des droites du triplexe de référence (D_1, D_2, D_3).

1. Faire une figure
2. (a) Montrer que l'ensemble G_T des bijections affines $f \in GA(\mathbb{R}^3)$ telles que $f(T) = T$ est un sous-groupe du groupe affine $GA(\mathbb{R}^3)$.
   (b) Montrer que si $f \in G_T$, alors $\forall i = 1..3$, il existe $j \in \{1,2,3\}$ tel que $f(D_i) = D_j$.
   (c) En déduire, à l'aide de la partie I, que le groupe G_T est isomorphe au groupe des permutations de l'ensemble $\{D_1, D_2, D_3\}$.
3. (a) Soit $f \in G_T$ l'application telle que $f(D_1) = D_2$, $f(D_2) = D_1$ et $f(D_3) = D_3$.
   Expliciter f à l'aide de la partie I, puis montrer que f stabilise l'ensemble des sommets du cube $\mathcal{C}$.

   On admettra pour la suite que l'application $h \in G_T$ telle que $h(D_1) = D_1$, $h(D_2) = D_3$ et $h(D_3) = D_2$ stabilise aussi les sommets du cube.
   (b) Déduire de ce qui précède que toute bijection $g \in G_T$ stabilise l'ensemble des sommets du cube $\mathcal{C}$ et qu'il existe un point fixe $a^* \in \mathbb{R}^3$ commun à tous les éléments de G_T que l'on déterminera.
4. Soit à présent (D_1, D_2, D_3) un triplexe arbitraire de $\mathbb{R}^3$. En guise de conclusion, que peut-on dire du sous-groupe des bijections affines f telles que $f(D_1 \cup D_2 \cup D_3) = D_1 \cup D_2 \cup D_3$?

Annexe

Figure 1

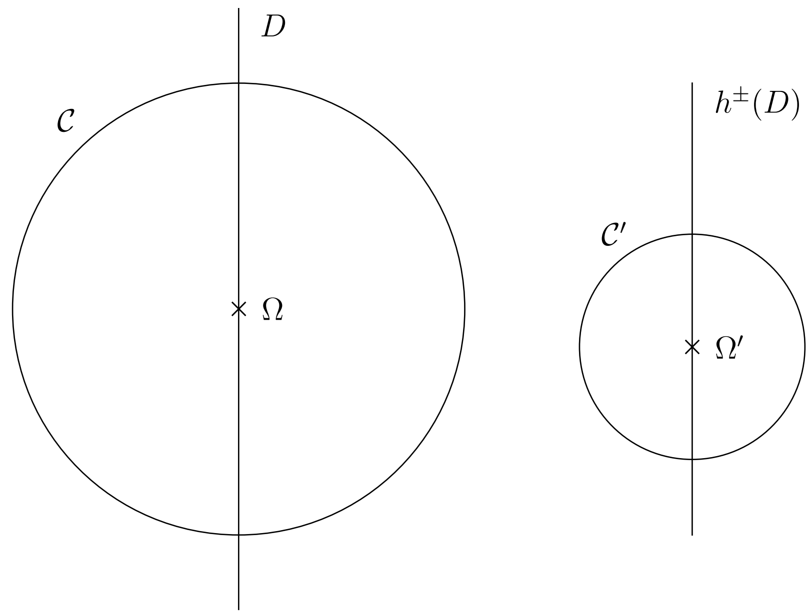

Figure 2