Devoir pour le 22 Octobre

Corrigé

Problème 1 (Partiel Avr.2006)

Soient E un plan affine de direction $\overrightarrow{E}$, muni d'un produit scalaire $< .|. >$ et h, h' deux homothéties de E de rapports respectifs $\rho \neq 1$ et $\rho' \neq 1$ et de centres I, I' avec $I \neq I'$.

1. (a) **Montrons que $\forall M \in E \backslash \{I\}$, I appartient à la droite $(Mh(M))$.**
Soit M un point de E distinct de I. Puisque h est l'homothétie de centre I et de rapport ρ, on a la relation suivante :
$$\boxed{\overrightarrow{Ih(M)} = \rho \overrightarrow{IM}}$$
Autrement dit, $h(M) = I + \rho\overrightarrow{IM}$, et donc I,M et $h(M)$ sont bien alignés.

   (b) **On suppose $\rho\rho' \neq 1$. Montrons que le centre I'' de l'homothétie $h \circ h'$ appartient à la droite (II').**
Posons $g = h \circ h'$. On a donc $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{h} \circ \overrightarrow{h'} = \rho\rho' Id_{\overrightarrow{E}}$. Comme $\rho\rho' \neq 1$, g est bien une homothétie, qui possède donc un unique centre I'', caractérisé comme le point fixe de g.
Soit A un point quelconque de E.
$$\begin{aligned} g(A) = A \Longleftrightarrow h \circ h'(A) = A \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists A_1 \in E \ / \ \begin{cases} A_1 = h'(A) \\ A = h(A_1) \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists A_1 \in E \ / \ \begin{cases} \overrightarrow{I'A_1} = \rho'\overrightarrow{I'A} \\ \overrightarrow{IA} = \rho\overrightarrow{IA_1} \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{IA} = \rho\left(\overrightarrow{II'} + \rho'\overrightarrow{I'A}\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{IA} = \rho(1-\rho')\overrightarrow{II'} + \rho\rho'\overrightarrow{IA} \\ &\Longleftrightarrow \quad (1-\rho\rho')\overrightarrow{IA} = \rho(1-\rho')\overrightarrow{II'} \end{aligned}$$
En particulier, comme $\rho\rho' \neq 1$, le point I'' défini par :
$$\boxed{II'' = \frac{\rho(1-\rho')}{1-\rho\rho'}\overrightarrow{II'}}$$
est un point fixe de g, qui est donc le seul (par unicité du point fixe d'une homothétie) et de plus, I'' est bien sur la droite (II').

2. (a) **Soient $\mathcal{C} = \{M \in E \ / \ < \overrightarrow{\Omega M}|\overrightarrow{\Omega M} >= R^2\}$ le cercle de centre Ω et de rayon R et h une homothétie de E (de centre I et de rapport ρ). Montrons que $h(\mathcal{C})$ est un cercle dont on déterminera le cercle et le rayon.**

Soit M un point quelconque appartenant au cercle $\mathcal{C}$. Alors :

$$< \overrightarrow{h(\Omega)h(M)} | \overrightarrow{h(\Omega)h(M)} > = < \vec{h}(\overrightarrow{\Omega M}) | \vec{h}(\overrightarrow{\Omega M}) = < \rho\overrightarrow{\Omega M} | \rho\overrightarrow{\Omega M} > = \rho^2 R^2$$

(par bilinéarité du produit scalaire, et par le caractère affine de l'homothétie h).
Ainsi, le point $h(M)$ appartient au cercle $\mathcal{C}'$ de centre $h(\Omega)$ et de rayon $\sqrt{\rho^2 R^2} = |\rho|R$.
On a donc montré que $h(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}'$.

Réciproquement, soit X un point de $\mathcal{C}'$. En appliquant le même raisonnement, on obtient que $h^{-1}(X) \in \mathcal{C}$. Donc finalement, $h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$.

(b) **Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de E de centres Ω et Ω' et de rayons R et R' avec $R \neq R'$. Montrer qu'il y a exactement deux homothéties $h^\pm$ (h^+ de rapport positif et h^- de rapport négatif) telles que $h^\pm(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$.**

D'après la question précédente, h tranforme le cercle $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$ si et seulement si $h(\Omega) = \Omega'$ et $|\rho|R = R'$.

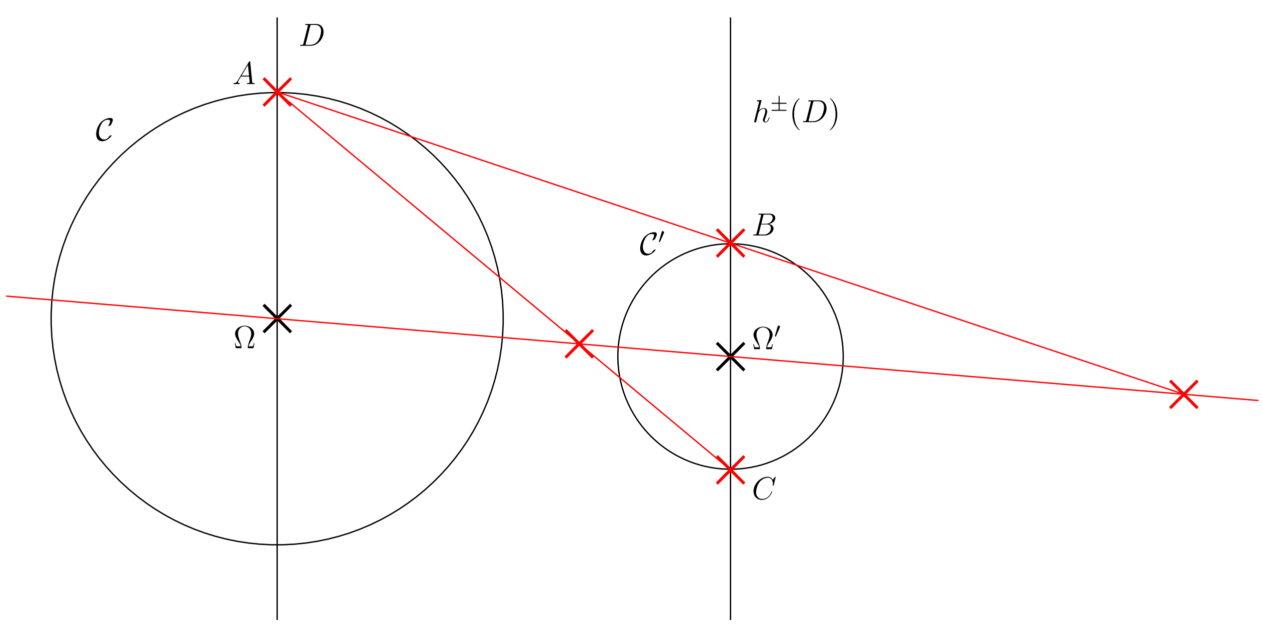
En particulier, le rapport ρ doit donc vérifier $|\rho| = \dfrac{R'}{R}$. Il y a donc exactement deux homothéties qui transforment $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$: h^+ de rapport $\dfrac{R'}{R}$ et h^- de rapport $-\dfrac{R'}{R}$.

(c) **En considérant les images $h^\pm(D)$ de la droite D, donner une construction géométrique simple des centres $I^\pm$ des homothéties $h^\pm$**

On sait déjà que $h^\pm(\Omega) = \Omega'$ donc les centres des homothéties sont alignés avec les centres des deux cercles.

Si A désigne une intersection entre la droite D et le cercle $\mathcal{C}$, on sait alors que $h(A)$ sera une intersection de $h^\pm(D)$ et $\mathcal{C}'$: on a deux possibilités B ou C. Alors le centre de l'homothétie appartiendra soit à la droite (AB), soit à (AC).

On trouve alors les deux points intersections de $(\Omega\Omega')$ avec (AB) et (AC) qui sont les centres des homothéties h^+ et h^-.

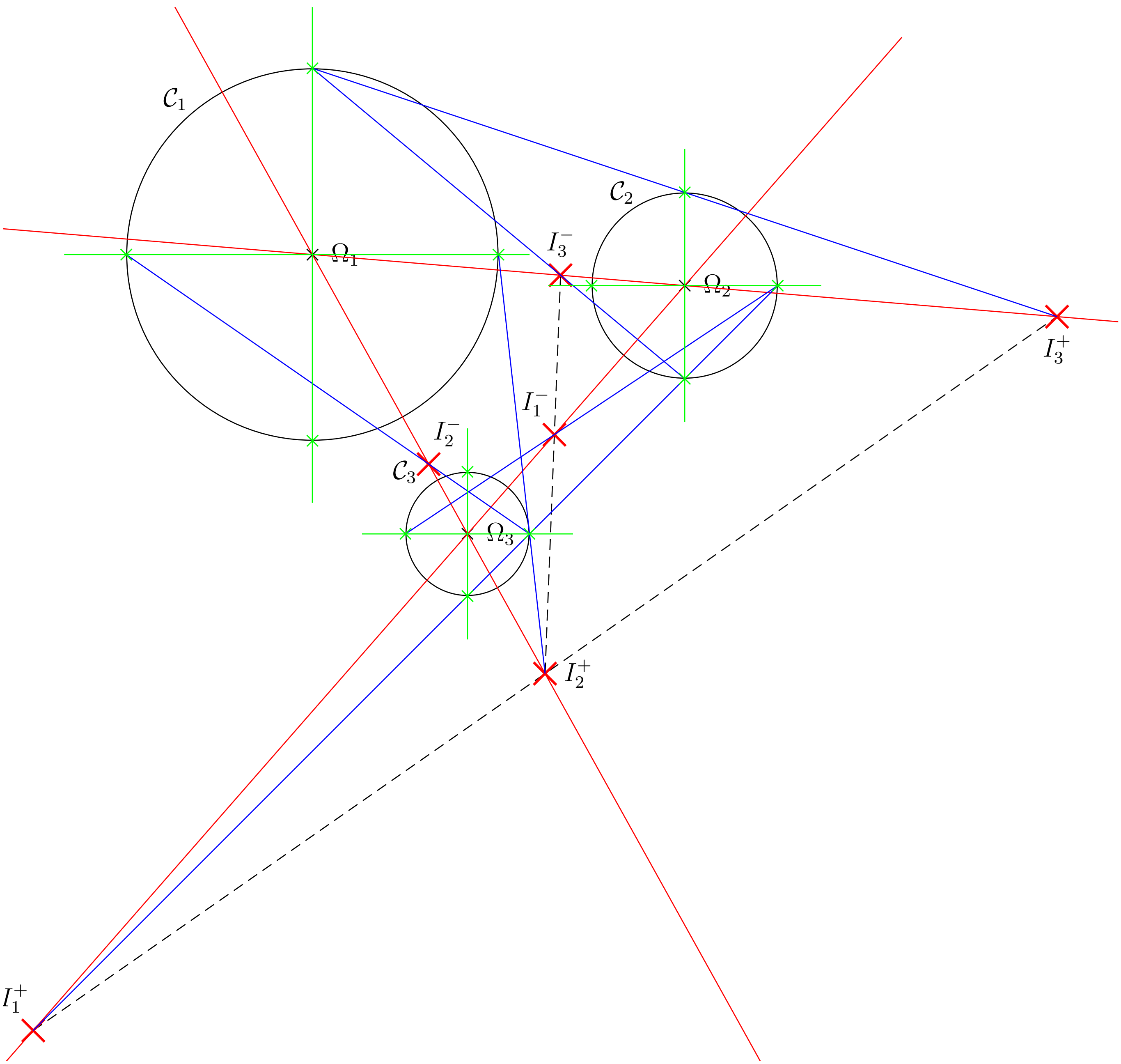


3. **On considère à présent trois cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ de E de centres et de rayons respectifs Ω_1, Ω_2, Ω_3 ; R_1, R_2, R_3 (centres et rayons deux à deux distincts). Soient $h_i^{\pm}$, $1 \leq i \leq 3$, les homothéties telles que**

$$h_3^{\pm}(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2, \quad h_1^{\pm}(\mathcal{C}_2) = \mathcal{C}_3, \quad h_2^{\pm}(\mathcal{C}_3) = \mathcal{C}_1$$

On notera $I_i^{\pm}$ les centres de $h_i^{\pm}$, $1 \leq i \leq 3$

(a) **Représentons les six centres d'homothéties $I_i^{\pm}$.**



Pour déterminer les points $I_i^{\pm}$, on trace des droites parallèles passant par les centres respectifs des cercles, puis on applique la méthode de la question précédente. Ainsi, partant de l'intersection d'une droite et d'un cercle, on fait correspondre les deux possibilités pour son image sur l'autre cercle. Ensuite, le centre cherché est aligné entre le point de départ et son image, et également avec les centres des deux cercles.

Nous allons montrer dans la fin du problème que les points $I_i^{\pm}$ admettent des propriétés d'alignement (en pointillés ici).

(b) **Déterminons $f = h_2^+ \circ h_1^- \circ h_3^-$.**

On étudie ici la composée de trois homothéties. Comme l'ensemble des homothéties-translations forme un groupe (c'est un sous-groupe du groupe affine), on sait que f va être soit une translation, soit une homothétie.

La partie linéaire de f est donnée par :

$$\overrightarrow{f} = \overrightarrow{h_2^+ \circ h_1^- \circ h_3^-} = \overrightarrow{h_2^+} \circ \overrightarrow{h_1^-} \circ \overrightarrow{h_3^-} = \left(\frac{R_1}{R_3} Id_{\overrightarrow{E}}\right) \circ \left(-\frac{R_3}{R_2} Id_{\overrightarrow{E}}\right) \circ \left(-\frac{R_2}{R_1} Id_{\overrightarrow{E}}\right) = Id_{\overrightarrow{E}}$$

La partie linéaire étant $Id_{\overrightarrow{E}}$, f est donc soit une translation, soit Id_E. Cherchons s'il existe un point fixe pour f.

On remarque que $f(\mathcal{C}_1) = h_2^+ \circ h_1^- \circ h_3^-(\mathcal{C}_1) = h_2^+ \circ h_1^{-1}(\mathcal{C}_2) = h_2^+(\mathcal{C}_3) = \mathcal{C}_1$.

Donc le cercle $\mathcal{C}_\infty$ est laissé globalement fixe par f : en particulier, son centre Ω_1 est un point fixe de f.

Comme f admet au moins un point fixe, on a :

$$\boxed{h_2^+ \circ h_1^- \circ h_3^- = Id_E}$$

(c) **En déduire que les points I_1^-, I_2^+, I_3^- sont alignés.**

L'égalité précédente peut s'écrire :

$$(h_2^+)^{-1} = h_1^- \circ h_3^-$$

En particulier, les deux membres de cette égalité sont des homothéties. Le membre de gauche a pour point fixe I_2^+ et d'après la question 1.(b), ce point fixe sera sur la droite $(I_1^{-1} I_3^-)$.

Ainsi, les points I_1^-, I_2^+, I_3^- sont bien alignés.

(d) **En procédant par analogie, montrer que les points I_1^+, I_2^+, I_3^+ sont alignés.**

Il suffit de faire la même chose sur la composée $f_1 = h_2^+ \circ h_1^+ \circ h_3^+$. En effet, la partie linéaire de f_1 reste la même que pour f, et l'ordre des h_i permet également de dire que $\mathcal{C}_1$ est fixe, donc $f_1 = Id_E$. Et, par le même raisonnement que la question précédente, les points I_1^+, I_2^+, I_3^+ sont bien alignés.

Problème 2 (Partiel Nov.2006)

On considère l'espace affine $E = \mathbb{R}^3$. Un triplet (D_1, D_2, D_3) de droites affines de $\mathbb{R}^3$ de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ esr appelé un triplexe si :

(i) $D_1 \cap D_2 = D_1 \cap D_3 = D_2 \cap D_3 = \emptyset$

(ii) $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ **est une base de l'espace vectoriel** $\overrightarrow{E} = \mathbb{R}^3$.

Partie I

Dans cette partie, on se propose d'étudier l'opération du groupe affine $GA(\mathbb{R}^3)$ sur l'ensemble des triplexes de $\mathbb{R}^3$.
Par convention, si A désigne un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$, on notera $\overrightarrow{A}$ sa direction.

1. **Montrer que l'image $\big(f(D_1), f(D_2), f(D_3)\big)$ de tout triplexe (D_1, D_2, D_3) par une bijection affine $f \in GA(\mathbb{R}^3)$ est encore un triplexe.**

   Soit (D_1, D_2, D_3) un triplexe de $\mathbb{R}^3$ et $f \in GA(\mathbb{R}^3)$. Comme f est une bijection affine, on a également que $\overrightarrow{f}$ est un isomorphisme de $\overrightarrow{E}$.

   f étant une application affine, l'image d'une droite $\mathcal{D}$ quelconque de $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace affine de E : $f(\mathcal{D})$, dont la direction est donnée par $\overrightarrow{f(\mathcal{D})} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathcal{D}})$. Comme $\overrightarrow{f}$ est bijective, la dimension de $\overrightarrow{f(\mathcal{D})}$ est encore 1 et donc $f(\mathcal{D})$ est une droite de l'espace $\mathbb{R}^3$.
   Ainsi, on a déjà bien que $f(D_1, D_2, D_3)$ est un triplet de droites.

   De plus, comme $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$, son image par l'isomorphisme $\overrightarrow{f}$ est encore une base de $\mathbb{R}^3$. Ainsi, $(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u_1}), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u_2}), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u_3}))$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

   Enfin, supposons par l'absurde que $f(D_i) \cap f(D_j) \neq \emptyset$ pour certains $i \neq j$. Alors, on aurait $D_i \cap D_j = f^{-1}(f(D_i) \cap f(D_j)) \neq \emptyset$ puisque f^{-1} est bijective. Ce qui est impossible puisque (D_1, D_2, D_3) est un triplexe.
   On a donc bien que $\forall i \neq j,\ f(D_i) \cap f(D_j) = \emptyset$.

2. **Rappelons une condition nécessaire et suffisante pour que deux sous-espaces affines A et A' de $\mathbb{R}^3$ soient d'intersection non vide.**
   Soient A et A' deux sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$, et soient P et P' deux points quelconques respectivement de A et A'. Alors :

$$A \cap A' \neq \emptyset \iff \overrightarrow{PP'} \in \overrightarrow{A} + \overrightarrow{A'}$$

   En effet, s'il existe $Q \in A \cap A'$, alors $A = Q + \overrightarrow{A}$ et $A' = Q + \overrightarrow{A'}$.
   Ainsi $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP'} \in \overrightarrow{A} + \overrightarrow{A'}$.

   Réciproquement, si $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{A'}$, on a $P' = P + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ et alors $P' - \overrightarrow{v} = P + \overrightarrow{u}$ appartient à la fois à A et à A'.

3. **Pour un triplexe (D_1, D_2, D_3), on désigne par $P_{i,j}$ $(i < j)$ le plan affine contenant D_i et de direction $\overrightarrow{P_{i,j}} = \overrightarrow{D_i} + \overrightarrow{D_j}$.**

   (a) **Montrer que D_1 coupe $P_{2,3}$ en un point a_1, que D_2 coupe $P_{1,3}$ en un point a_2 et que D_3 coupe $P_{1,2}$ en un point a_3.**

   Le plan $P_{2,3}$ est dirigé par $\overrightarrow{D_2} + \overrightarrow{D_3} = Vect(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$

   Comme $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une famille libre, on a donc $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{D_1} \oplus \overrightarrow{P_{2,3}}$.

   Ainsi, $\forall Q_1 \in D_1$, $\forall Q_2 \in P_{2,3}$, $\overrightarrow{Q_1Q_2} \in \overrightarrow{E} = \overrightarrow{D_1} + \overrightarrow{P_{2,3}}$. Donc d'après la question précédente, on a bien $D_1 \cap P_{2,3} \neq \emptyset$, mais comme $\dim(\overrightarrow{D_1} \cap \overrightarrow{P_{2,3}}) = 0$, l'intersection $D_1 \cap P_{2,3}$ est réduite à un unique point noté a_1.

   On fait de même pour montrer que $D_2 \cap P_{1,3} = \{a_2\}$ et que $D_3 \cap P_{1,2} = \{a_3\}$

   (b) **Montrer qu'il existe trois vecteurs $\overrightarrow{v_i} \in \overrightarrow{D_i}$, $1 \leq i \leq 3$, tels que**

$$\overrightarrow{a_1a_2} = \overrightarrow{v_3} \quad , \quad \overrightarrow{a_1a_3} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$$

   Rappelons que $a_i \in P_{i,j}$ puisque $D_i \subset P_{i,j}$, et également $a_i \in P_{j,k}$ d'après la question précédente.

   Ainsi, $a_1 \in P_{2,3} = a_2 + \overrightarrow{D_2} + \overrightarrow{D_3}$. Donc :

$$\overrightarrow{a_2a_1} \in \overrightarrow{D_2} + \overrightarrow{D_3}$$

   De même, $a_2 \in P_{1,3} = a_1 + \overrightarrow{D_1} + \overrightarrow{D_3}$. Donc :

$$\overrightarrow{a_1a_2} \in \overrightarrow{D_1} + \overrightarrow{D_3}$$

   Comme les sommes $\overrightarrow{D_i} + \overrightarrow{D_j}$ sont directes, on en déduit, que $\overrightarrow{a_1a_2} \in \overrightarrow{D_3}$. D'où :

$$\boxed{\exists \overrightarrow{v_3} \in \overrightarrow{D_3} \ / \ \overrightarrow{a_1a_2} = \overrightarrow{v_3} \in \overrightarrow{D_3}}$$

   Par ailleurs, $a_3 \in P_{1,2} = a_1 + \overrightarrow{D_1} + \overrightarrow{D_2}$, on a donc : $\overrightarrow{a_1a_3} \in \overrightarrow{D_1} + \overrightarrow{D_2}$. Autrement dit :

$$\boxed{\exists \overrightarrow{v_1} \in \overrightarrow{D_1}, \exists \overrightarrow{v_2} \in \overrightarrow{D_2} \ / \ \overrightarrow{a_1a_3} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}}$$

   Montrons ensuite que $\overrightarrow{v_i} \neq \overrightarrow{0}$, $1 \leq i \leq 3$.
   Supposons que $\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{0}$. Alors $\overrightarrow{a_1a_2} = \overrightarrow{0}$, autrement dit $a_1 = a_2$.
   Mais $D_1 \cap D_2 = \emptyset$: contradiction. Donc $\boxed{\overrightarrow{v_3} \neq \overrightarrow{0}}$.

   Supposons que $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0}$. Alors $\overrightarrow{a_1a_3} = \overrightarrow{v_1} \in \overrightarrow{D_1}$, autrement dit, $a_3 \in D_1$.
   Mais $D_1 \cap D_3 = \emptyset$: contradiction. Donc $\boxed{\overrightarrow{v_2} \neq \overrightarrow{0}}$.

   Supposons que $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{0}$. Alors $\overrightarrow{a_1a_3} = \overrightarrow{v_2} \in \overrightarrow{D_2}$.
   Mais alors on a $\overrightarrow{a_2a_3} = \overrightarrow{a_2a_1} + \overrightarrow{a_1a_3} \in \overrightarrow{D_3} + \overrightarrow{D_2}$, donc on aurait $D_2 \cap D_3 \neq \emptyset$: contradiction.
   Donc $\boxed{\overrightarrow{v_1} \neq \overrightarrow{0}}$.

Pour la suite, on notera $\mathcal{R}_{(D_1,D_2,D_3)}$ la base affine $(a_1, a_1+\overrightarrow{v_1}, a_1+\overrightarrow{v_2}, a_1+\overrightarrow{v_3})$ ainsi construite.

4. **Soient (D'_1, D'_2, D'_3) un second triplexe, $P'_{i,j}$, $(i<j)$, (resp. a') les plans (resp. les points d'intersection) définis comme à la question 3.**
On suppose que f est une bijection affine telle que $f(D_i) = D'_i$, pour $i = 1..3$.
   (a) **Montrer que $f(P_{i,j}) = P'_{i,j}$**

   On sait que $D_i \subset P_{i,j}$. Donc $D'_i = f(D_i)$ est un sous-espace affine de $f(P_{i,j})$.
   De plus, on sait que $\overrightarrow{P_{i,j}} = \overrightarrow{D_i} + \overrightarrow{D_j}$. Donc $\overrightarrow{f(P_{i,j})} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{D_i}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{D_j}) = \overrightarrow{D'_i} + \overrightarrow{D'_j}$
   Donc $f(P_{i,j})$ et $P'_{i,j}$ ont même direction, et au moins un point commun (puisque $f(D_i) \subset P'_{i,j}$). Donc $f(P_{i,j}) = P'_{i,j}$.

   (b) **Montrer que $f(a_i) = a'_i$ pour $i = 1..3$.**

   Soit $i = 1..3$. On a $a'_i = D'_i \cap P'_{j,k}$ avec $j \neq i$, $k \neq i$.
   Donc $a'_i = D'_i \cap P'_{j,k} = f(D_i) \cap f(P_{j,k}) = f(D_i \cap P_{j,k}) = f(a_i)$.

   (c) **Montrer que $f\left(\mathcal{R}_{(D_1,D_2,D_3)}\right) = \mathcal{R}_{(D'_1,D'_2,D'_3)}$.**
   On a noté $\mathcal{R}_{(D_1,D_2,D_3)}$ la base affine définie par : $(a_1, a_1+\overrightarrow{v_1}, a_1+\overrightarrow{v_2}, a_1+\overrightarrow{v_3})$.

   – On déjà montré que $f(a_1) = a'_1$.
   – De plus, $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v_3}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{a_1a_2}) = \overrightarrow{f(a_1)f(a_2)} = \overrightarrow{a'_1a'_2} = \overrightarrow{v'_3}$.
   – Enfin $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v_1}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{a_1a_3}) = \overrightarrow{f(a_1)f(a_3)} = \overrightarrow{a'_1a'_3} = \overrightarrow{v'_1} + \overrightarrow{v'_2}$
   Or $\overrightarrow{v'_1} + \overrightarrow{v'_2} \in \overrightarrow{D'_1} \oplus \overrightarrow{D'_2}$ et $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v_1}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v_2}) \in \overrightarrow{D'_1} \oplus \overrightarrow{D'_2}$, donc par unicité de la décomposition dans une somme directe de sous-espaces vectoriels, on a bien : $f(\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{v'_1}$ et $f(\overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{v'_2}$.

   (d) **En déduire qu'il existe au plus une bijection affine f telle que $f(D_i) = D'_i$, $i = 1..3$.**
   S'il existe f une bijection affine vérifiant $f(D_i) = D'_i$, on a montré dans les questions précédentes que f était entièrement déterminée, puisqu'on connaît explicitement l'image d'une base affine par f.
   Ainsi, on a unicité de la bijection affine f telle que $f(D_i) = D'_i$.

5. **Montrer à l'aide des questions précédentes que l'opération du groupe affine sur l'ensemble $\mathcal{T}$ des triplexes, définie par :**

$$\varphi : \begin{array}{ccc} GA(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{T} & \longrightarrow & \mathcal{T} \\ (f, (D_1, D_2, D_3)) & \longmapsto & (f(D_1), f(D_2), f(D_3)) \end{array}$$

est une opération simple et transitive.
Déjà, φ réalise bien une opération du groupe affine $GA(\mathbb{R}^3)$ sur l'ensemble $\mathcal{T}$.
En effet, $\forall \tau \in \mathcal{T}$, on a $\varphi(Id_E, \tau) = \tau$.
De plus, $\forall f, g \in GA(\mathbb{R}^3)$, $\forall (D_1, D_2, D_3) \in \mathcal{T}$, on a :

$$\varphi(f \circ g, (D_1, D_2, D_3)) = (f(g(D_1)), f(g(D_2)), f(g(D_3))) = \varphi(f, \varphi(g, (D_1, D_2, D_3)))$$

Opération simple.
Soit $\tau = (D_1, D_2, D_3)$ un triplexe de $\mathbb{R}^3$. Cherchons G_τ le stabilisateur du triplexe τ. On a $Id(\tau) = \tau$, or d'après la question précédente, c'est l'unique bijection affine qui envoie D_i sur D_i pour tout i : On a donc bien $G_\tau = \{Id_E\}$: l'action est simple.

Opération transitive.

Soient τ, τ' deux triplexes de $\mathbb{R}^3$. Existe-t-il $f \in GA(\mathbb{R}^3)$ tel que $f(\tau) = \tau'$?

D'après les questions précédentes, il suffit donc de prendre la bijection f qui envoie $\mathcal{R}_\tau$ sur $\mathcal{R}'_\tau$: l'action est bien transitive.

6. **Peut-on aussi conclure qu'il en est de même si on se place dans un espace affine réel quelconque de dimension 3 ? Justifier votre réponse.**

   Soit X un espace affine réel quelconque de dimension 3. On sait que X est isomorphe à $\mathbb{R}^3$ en tant qu'espace affine.

   Soient (D_1, D_2, D_3), $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ deux triplexes de X et $\psi : X \to \mathbb{R}^3$ une bijection affine.

   Les triplets $(\psi(D_1), \psi(D_2), \psi(D_3))$, $(\psi(\Delta_1), \psi(\Delta_2), \psi(\Delta_3))$ sont des triplexes (d'après la question 1). Par ce qui précède il existe une unique bijection affine f de $\mathbb{R}^3$ telle que $(f \circ \psi(D_1), f \circ \psi(D_2), f \circ \psi(D_3)) = (\psi(\Delta_1), \psi(\Delta_2), \psi(\Delta_3))$. Il suffit donc de prendre $g = \psi^{-1} \circ f \circ \psi$ qui convient pour notre problème, l'unicité de g résultant automatiquement de celle de f.

Partie II

Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ **la base canonique de** $\mathbb{R}^3$**. On considère le cube** $\mathcal{C}$ **défini par**

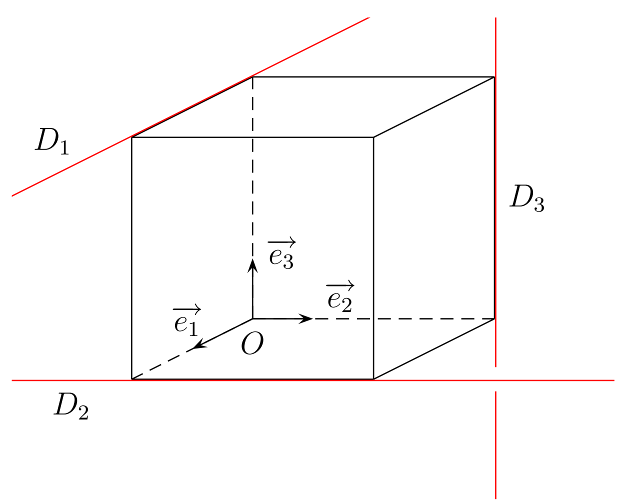
$$\mathcal{C} = \{(x_1, x_2, x_3) \ / \ \forall i = 1..3, 0 \leq x_i \leq 1\}$$

Pour la suite du problème, on fixe un triplexe de référence $(D_i)_{i=1..3}$ **en choisissant trois arêtes du cube** C **comme suit :**

- D_1 **est la droite affine passant par** $(0,0,1)$ **et dirigée par** $\overrightarrow{e_1}$**.**
- D_2 **est la droite affine passant par** $(1,0,0)$ **et dirigée par** $\overrightarrow{e_2}$**.**
- D_3 **est la droite affine passant par** $(0,1,0)$ **et dirigée par** $\overrightarrow{e_3}$**.**

On se propose dans cette partie d'étudier l'ensemble des bijections affines qui stabilisent la réunion $T = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ **des droites du triplexe de référence** (D_1, D_2, D_3)**.**

1. **Faisons une figure**.



2. (a) **Montrer que l'ensemble G_T des bijections affines $f \in GA(\mathbb{R}^3)$ telles que $f(T) = T$ est un sous-groupe du groupe affine $GA(\mathbb{R}^3)$.**
   - L'ensemble G_T est constitué de bijections affines, il est donc par définition inclus dans $GA(\mathbb{R}^3)$.
   - $Id(T) = T$, donc $Id \in G_T$.
   - $\forall f, g \in G_T,\ f \circ g^{-1}(T) = f(T) = T$ (car $G(T) = T \Leftrightarrow g^{-1}(T) = T$).

   Ainsi, G_T est bien un sous-groupe du groupe affine $GA(\mathbb{R}^3)$.

   (b) **Montrer que si $f \in G_T$, alors $\forall i = 1..3$, il existe $j \in \{1, 2, 3\}$ tel que $f(D_i) = D_j$.**
   Comme f est bijective et que D_i est une droite, $f(D_i)$ sera un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1, donc une droite.
   Or, $f(D_i) \subset D_1 \cup D_2 \cup D_3$, sachant que leurs intersections deux à deux sont vides. Elle est donc incluse dans au moins une des droites notée D_j. Alors $f(D_i) = D_j$.

   (c) **En déduire, à l'aide de la partie I, que le groupe G_T est isomorphe au groupe des permutations de l'ensemble $\{D_1, D_2, D_3\}$.**

   Soit $f \in G_T$. On a $f(T) = T$ et comme f injective, si $i \neq j$, on a $f(D_i) \neq f(D_j)$. Il existe donc une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_3$ telle que $\forall i = 1..3,\ f(D_i) = D_{\sigma(i)}$. On peut donc définir une application :
$$\varphi : \begin{array}{ccc} G_T & \longrightarrow & \mathcal{S}_3 \\ f & \longmapsto & \sigma \end{array}$$

   L'application φ est un morphisme de groupes entre G_T et σ. De plus, d'après la partie I, pour toute permutation σ de $\mathcal{S}_3$, on a vu qu'il existait une et une seule application affine bijective f telle que $f(D_i) = D_{\sigma(i)}$: φ est donc de plus bijective.

   On a finalement prouvé que G_T et $\mathcal{S}_3$ sont deux groupes isomorphes.

3. (a) **Soit $f \in G_T$ l'application telle que $f(D_1) = D_2$, $f(D_2) = D_1$ et $f(D_3) = D_3$. Explicitons f à l'aide de la partie I**

   $P_{2,3}$ désigne la face avant du cube. On a donc $\boxed{a_1 = (1, 0, 1)}$.

   $P_{1,3}$ désigne la face gauche du cube. On a donc $\boxed{a_2 = (1, 0, 0)}$.

   $P_{1,2}$ désigne la face du dessus du cube. On a donc $\boxed{a_3 = (0, 1, 1)}$.

   On en déduit que $\boxed{\overrightarrow{v_1} = -\overrightarrow{e_1}}$, $\boxed{\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{e_2}}$, $\boxed{\overrightarrow{v_3} = -\overrightarrow{e_3}}$

   Ici, on est dans le cas où $D'_1 = D_2$, $D'_2 = D_1$ et $D'_3 = D_3$.

   $P'_{2,3}$ désigne donc $P_{1,3}$. On a donc $\boxed{a'_1 = a_2}$.

   $P'_{1,3}$ désigne donc $P_{2,3}$. On a donc $\boxed{a'_2 = a_1}$.

   $P'_{1,2}$ désigne cependant la face du dessous du cube. On a donc $\boxed{a'_3 = (0, 1, 0)}$.

   On en déduit que $\boxed{\overrightarrow{v'_1} = \overrightarrow{e_2}}$, $\boxed{\overrightarrow{v'_2} = -\overrightarrow{e_1}}$, $\boxed{\overrightarrow{v'_3} = \overrightarrow{e_3}}$
   On en déduit donc la partie linéaire de f :
$$mat(\overrightarrow{f}, (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

De plus $O = a_1 + \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_3}$.

Donc $f(0) = f(a_1) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v_1}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v_3}) = a_2 + \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_3} = (1,1,1)$.

Ainsi, f est entièrement déterminée : pour tout point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y,z) = (1,1,1) + (-y,-x,-z) = \boxed{(1-y, 1-x, 1-z)}$$

Montrer que f stabilise l'ensemble des sommets du cube $\mathcal{C}$.

Les sommets du cube $\mathcal{C}$ sont de la forme (x_1, x_2, x_3) où $x_i \in \{0,1\}$. D'après la formule explicite de f, on a donc bien que l'image d'un sommet de $\mathcal{C}$ reste un sommet de $\mathcal{C}$.

On admettra pour la suite que l'application $h \in G_T$ telle que $h(D_1) = D_1$, $h(D_2) = D_3$ et $h(D_3) = D_2$ stabilise aussi les sommets du cube.

On pourrait montrer de même que, pour tout point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$h(x,y,z) = \boxed{(1-x, 1-z, 1-y)}$$

(b) **Déduire de ce qui précède que toute bijection $g \in G_T$ stabilise l'ensemble des sommets du cube $\mathcal{C}$ et qu'il existe un point fixe $a^* \in \mathbb{R}^3$ commun à tous les éléments de G_T que l'on déterminera.**

On utilise l'isomorphisme que l'on a avancé entre G_T et $\mathcal{S}_3$. Ici f correspond à la transposition t_{12} et h correspond à la transposition t_{23}.

Or $\mathcal{S}_3$ est engendré par $\{t_{12}, t_{23}\}$. Ainsi, tout élément de G_T sera composé de f et h et donc conservera l'ensemble des sommets du cube $\mathcal{C}$.

On en déduit qu'il existe un point fixe commun à tous les éléments de G_T : c'est l'isobarycentre des sommets du cube, que l'on note a^*

4. **Soit à présent (D_1, D_2, D_3) un triplexe arbitraire de $\mathbb{R}^3$. En guise de conclusion, que peut-on dire du sous-groupe des bijections affines f telles que $f(D_1 \cup D_2 \cup D_3) = D_1 \cup D_2 \cup D_3$?**

On se ramène au cas du triplexe de référence par un isomorphisme.

Soit $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ le triplexe de référence (on change les notations) et soit ψ l'unique bijection affine telle que $(\psi(\Delta_1), \psi(\Delta_2), \psi(\Delta_3)) = (D_1, D_2, D_3)$. L'application définie par :

$$\begin{array}{ccc} G_{(D_1,D_2,D_3)} & \longrightarrow & (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) \\ f & \longmapsto & \psi^{-1} \circ f \circ \psi \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes.

En conclusion, le groupe $G_{(D_1,D_2,D_3)}$ est également isomorphe au groupe des permutations $\mathcal{S}_3$ et il existe un point fixe commun aux éléments de ce groupe : c'est $\psi(a^*)$.