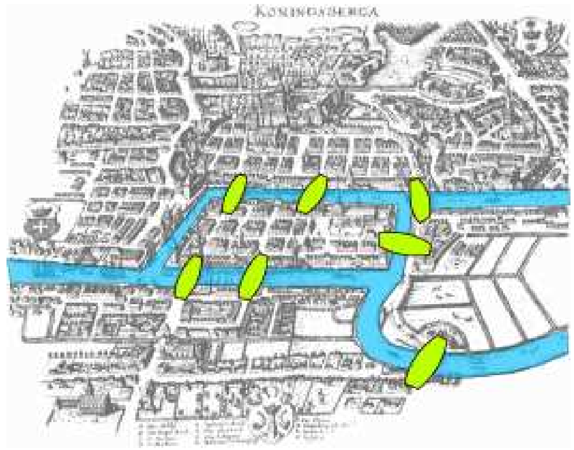
Université Claude Bernard Lyon 1 2008-2009

L3 Géométrie élémentaire

Questions diverses (à titre informatif)

Question 1 : Les ponts de Koenigsberg



La ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) est construite autour de deux îles reliées entre elles par un pont et six ponts relient le continent à l'une ou l'autre des deux îles. Existe-il une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont, et de revenir à son point de départ (étant entendu qu'on ne peut traverser le Pregel qu'en passant sur les ponts) ?

Question 2 : Nombres constructibles

Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ des réels qui sont constructibles à la règle et au compas est un sous-corps de $\mathbb{R}$, stable par racine carrée ($i.e\ \ \forall c \in \mathcal{C},\ \sqrt{c} \in \mathcal{C}$)

Question 3 : Le nombre d'or

On considère un rectangle de longueur L et de largeur l, avec $l < L < 2l$. Le nombre d'or est le rapport $\varphi = \dfrac{L}{l}$ tel que :

$$\frac{L}{l} = \frac{l}{L-l}$$

Donner une construction de φ à la règle et au compas en partant de deux points O et I du plan.

Itération : à partir d'un rectangle de rapport $\dfrac{L_0}{l_0} = \varphi$, on crée une suite de rectangles de longueur L_n et de largeur l_n en posant : $L_{n+1} = l_n$ et $l_{n+1} = L_n - l_n$.

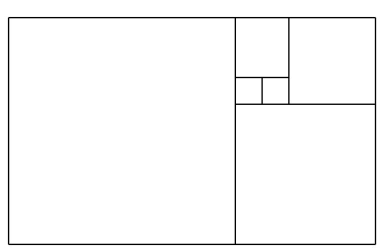
Faire une figure. Quel est le rapport $\dfrac{L_n}{l_n}$?

Question 4 : Une suite remarquable : les nombres de Fibonacci

On considère la suite d'entiers $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$f_0 = 1,\ f_1 = 1, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

En voici une représentation géométrique :



Déterminer f_n et montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi$