Révisions pour l'Examen

Exercice 1

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3 et soit $G = Iso^+(E) \subset GA(E)$ le groupe des déplacements de E de dimension 3. On rappelle que G est constitué des transformations suivantes :
- les rotations
- les translations
- les produits d'une rotation d'axe D et d'une translation de vecteur non nul $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{D}$

On se propose ici de déterminer le sous-groupe des commutateurs $[G, G]$ de $Iso^+(E)$.

1. Montrer que toute symétrie orthogonale par rapport à une droite D appartient à G.
2. (a) Vérifier que le produit de deux symétries orthogonales par rapport à deux droites parallèles D et D' est une translation puis montrer que toute translation τ peut s'écrire sous la forme $s' \circ s$ où s' et s sont des symétries orthogonales par rapport à des droites.
   (b) Montrer que toute translation τ peut s'écrire τ_0^2 où τ_0 est une translation.
   (c) Déduire des deux questions précédentes que toute translation τ est un commutateur de G
3. Soient D et D' deux droites distinctes de E passant par un point O. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à la droite D, s' la symétrie orthogonale par rapport à D'
   (a) Montrer que $s' \circ s$ est une rotation d'axe orthogonal au plan défini par D et D'
   (b) Soit $r \neq Id_E$ une rotation appartenant à G. En écrivant r sous la forme r_0^2 où r_0 est une rotation, montrer que r est un commutateur de G
4. Démontrer que G est égal à son sous-groupe des commutateurs : $[G, G] = G$.

Exercice 2

1. Soit Γ la représentation graphique dans un repère orthonormal de la fonction sinus. Quelles sont les isométries affines qui conservent la figure Γ ?
2. Déterminer les isométries affines qui conservent l'ensemble $\mathcal{P}$ des points de coordonnées $(n, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ dans un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan affine euclidien.

Exercice 3

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3. Soient P_1 et P_2 deux plans orthogonaux de E. Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P_1}$.

On note s_1 et s_2 les symétries orthogonales par rapport à P_1 et P_2. Soit r la symétrie orthogonale par rapport à une droite D qui est contenue dans P_1 et orthogonale à P_2.

1. Quelles sont les natures des isométries suivantes :
$$f = s_2 \circ r, \qquad g = s_1 \circ t_{\overrightarrow{u}}$$
2. L'isométrie $f \circ g$ est-elle un déplacement ou un antidéplacement ?
3. Quelle est la nature de l'application linéaire associée $\overrightarrow{f \circ g}$?
4. Quels sont les vecteurs fixes de $\overrightarrow{f \circ g}$?
5. Quels sont les points fixes de $f \circ g$?
6. Quelle est la nature de l'isométrie $f \circ g$?

Exercice 4

Dans cet exercice, E désigne un espace affine euclidien. On se donne deux isométries f et g de E.
On suppose par ailleurs que f et g possèdent des points fixes et qu'elles commutent.
On se propose de démontrer que f et g ont au moins un point fixe en commun.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}$ des points fixes de f est un sous-esp. affine de E et décrire sa direction $\overrightarrow{\mathcal{F}}$.
2. Démontrer que le sous-espace affine $\mathcal{F}$ est invariant par g, autrement dit $g(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.
3. Soit Ω un point fixe de g et ω la projection orthogonale de Ω sur $\mathcal{F}$. Démontrer que ω est un point fixe commun à f et g.

   (Indication : on pourra montrer que g laisse stable le sous-espace $\Omega + \overrightarrow{\mathcal{F}}$)
4. Que peut-on alors dire dans le cas où l'on a de plus $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{g}$?

Exercice 5

Soient E un plan affine euclidien et $f : E \to E$ une symétrie glissée par rapport à une droite D
(autrement dit, il existe $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}$ tel que $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ s_D = s_D \circ t_{\overrightarrow{u}}$).
Soit O un point de E qui n'appartient pas à D. On note X la partie de E formée des points $f^n(O), n \in \mathbb{Z}$.
Soit G le groupe des isométries g de E telles que $g(X) = X$. On se propose de déterminer G.

On notera D' la droite parallèle à D passant par O et D'' la droite parallàle à D passant par $f(O)$.

1. Montrer que G contient le groupe formé des $f^k, k \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que pour tout élément g de G, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f^n \circ g$ appartient à G et admet O pour point fixe.
3. Montrer que D' et D'' sont les seules droites de E contenant trois points distincts deux à deux de X. En déduire que tout $g \in G$ laisse stable la réunion $D' \cup D''$.
4. Montrer que l'on a $g(D) = D$ pour tout $g \in G$.
5. Soit g une transformation dans G qui admet O pour point fixe. Montrer que g est soit Id_E soit la symétrie orthogonale σ par rapport à la droite orthogonale à D passant par O.
6. Montrer que tout élément g de G est de la forme $f^n \circ \sigma^\varepsilon$, où $\varepsilon \in \{0, 1\}$, et $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 6

On considère k hyperplans $H_1, \dots, H_k$ d'un espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{E}$. On note $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ les réflexions correspondantes et $\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_k}$ des vecteurs unitaires tels que $H_i^\perp = Vect(\overrightarrow{x_i})$ pour tout $i = 1..k$.

Soit G le sous-groupe de $O(\overrightarrow{E})$ engendré par les réflexions σ_i (c'est-à-dire le sous-groupe de $O(\overrightarrow{E})$ dont les éléments sont les compositions d'un nombre fini de σ_i, pour $i = 1..k$).

1. Déterminer l'ensemble des points fixes communs à tous les éléments de G :

   $$\overrightarrow{E}^G = \{\overrightarrow{x} \in E \ / \ \forall g \in G, g(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}\}$$

   En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les $\overrightarrow{x_i}$ pour que $\overrightarrow{E}^G = \{\overrightarrow{0}\}$.
   (Indication : utiliser l'égalité $(V \cap V')^\perp = V^\perp + V'^\perp$)

2. Etant donné $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E} \backslash \{\overrightarrow{0}\}$, on désigne par $\sigma_{<\overrightarrow{x}>^\perp}$ la réflexion d'hyperplan $(Vect(\overrightarrow{x}))^\perp$. On considère le sous-ensemble

   $$\Delta = \{\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E} \ / \ \|\overrightarrow{x}\| = 1 \text{ et } \exists i = 1..k, \exists g \in G \text{ tels que } \sigma_{<\overrightarrow{x}>^\perp} = g^{-1} \circ \sigma_i \circ g\}$$

   Montrer que Δ est globalement invariant sous l'action de G, ie $\forall g \in G, g(\Delta) \subset \Delta$.

3. Montrer que si Δ est fini et si $\overrightarrow{E}^G = \{\overrightarrow{0}\}$, alors G est fini.

   (Indication : soit $\mathcal{S}_\Delta$ le groupe des permutations de Δ. Montrer que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} G & \to & \mathcal{S}_\Delta \\ g & \mapsto & g_{|\Delta} \end{array}$ est injective)

4. Soit $\overrightarrow{E} = \mathbb{R}^n$, $(\overrightarrow{e_i})_{i=1..n}$ la base canonique et $H_i = (\mathbb{R}\overrightarrow{e_i})^\perp$ pour $i = 1..n$.
   Montrer que G est un groupe abélien et déterminer son cardinal. Déterminer Δ.

Exercice 7 (Examen Décembre 2007)

Soit E l'espace affine $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel $< .|. >$ et de la distance euclidienne d usuelle. La direction d'un sous-espace affine $A \subset \mathbb{R}^n$ est notée $\overrightarrow{A}$. Deux sous-espaces affines sont dit orthogonaux si leurs directions sont orthogonales.

Partie I

Soient A et B deux sous-espaces affines de $\mathbb{R}^n$ tels que $\overrightarrow{A} \cap \overrightarrow{B} = \{\overrightarrow{0}\}$

1. (a) Soit $(a, b) \in A \times B$. Justifier l'existence et l'unicité de vecteurs $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{A}^{\perp} \cap \overrightarrow{B}^{\perp}$ tels que
$$\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$$
   (b) Montrer qu'il existe un couple $(A_0, B_0) \in A \times B$ tel que $\overrightarrow{A_0B_0} \in \overrightarrow{A}^{\perp} \cap \overrightarrow{B}^{\perp}$. Montrer qu'un tel couple est unique.
   (c) Montrer que si (A_0, B_0) vérifie la condition du b), alors on a
$$\forall (a, b) \in A \times B, \quad d(A_0, B_0) \leq d(a, b)$$
2. On pose $k = n - \dim(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B})$.
   (a) Montrer à l'aide du 1.b) qu'il existe un unique sous-espace affine C de E de dimension k, orthogonal à A et à B et tel que $A \cap C \neq \emptyset$ et $B \cap C \neq \emptyset$.
   (b) Que peut-on dire de $A \cap C$ et de $B \cap C$ (Justifier votre réponse).

On supposera dans la suite que $n = 3$. On appelle **perpendiculaire commune** aux droites affines D et D' toute droite affine D'' qui coupe D et D' orthogonalement.

3. On suppose D et D' non parallèles.
   (a) Justifier l'existence et l'unicité de la perpendiculaire commune D'' à D et D'.
   (b) Soit $\mathcal{C} \subset (\mathbb{R}^+)^3$ le cube unité porté par le repère canonique $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. Donner deux points et faire le tracé de la perpendiculaire commune pour chacune des trois paires de droites de la figure (justifier votre réponse).

Partie II

On appelle m-**droite** de $\mathbb{R}^3$ toute réunion $\mathbb{D} = \bigcup\limits_{i=1..m} D_i$ de m droites affines deux à deux distinctes. On se propose d'étudier certaines propriétés de l'action du groupe des isométries affines $Iso(\mathbb{R}^3)$ sur l'ensemble des m-droites. On commence par le groupe affine $GA(\mathbb{R}^3)$.

1. Montrer que l'image d'une m-droite par une bijection affine f est une m-droite.
2. Soient $\mathbb{D} = \bigcup\limits_{i=1..m} D_i$ et $\boldsymbol{\Delta} = \bigcup\limits_{i=1..m} \Delta_i$ deux m-droites et f une bijection affine telle que $f(\mathbb{D}) = \boldsymbol{\Delta}$. Montrer que pout tout i, il existe j tel que $f(D_i) = \Delta_j$.
3. On suppose $m = 3$. Donner, en justifiant votre réponse, un exemple de deux tri-droites $\mathbb{D}$ et $\boldsymbol{\Delta}$ pour lesquelles :
   (i) il n'existe aucune bijection affine f telle que $f(\mathbb{D}) = \boldsymbol{\Delta}$.
   (ii) il existe une infinité de bijection affines f telles que $f(\mathbb{D}) = \boldsymbol{\Delta}$.
   (iii) il existe exactement six bijections affines telles que $f(\mathbb{D}) = \boldsymbol{\Delta}$.

Partie III-1

On suppose $m = 2$. On dit qu'une paire de droites (D, D') est **gauche** si D et D' sont non parallèles et non sécantes.

Dans cette partie, (D, D') et (Δ, Δ') désignent deux paires de droites gauches, de perpendiculaires communes respectives D'' et Δ''. On note $\overrightarrow{e}, \overrightarrow{e'}, \overrightarrow{e''}$ (resp. $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{u''}$) des vecteurs directeurs unitaires de D, D', D'' (resp. de $\Delta, \Delta', \Delta''$) et

$$\{A\} = D \cap D'', \quad \{A'\} = D' \cap D'', \quad \{\alpha\} = \Delta \cap \Delta'', \quad \{\alpha'\} = \Delta' \cap \Delta''$$

1. Soit $f \in Iso(\mathbb{R}^3)$. Montrer que l'image $(f(D), f(D'))$ est une paire gauche.
2. On suppose qu'il existe une isométrie affine f telle que $f(D) = \Delta$ et $f(D') = \Delta'$.
   (a) Montrer que $f(D'') = \Delta''$.
   (b) En déduire que $d(A, A') = d(\alpha, \alpha')$.
   (c) Montrer que $< \overrightarrow{e} | \overrightarrow{e'} >= \pm < \overrightarrow{u} | \overrightarrow{u'} >$.
3. Montrer qu'il existe une isométrie affine $f \in Iso(\mathbb{R}^3)$ telle que $f(D \cup D') = \Delta \cup \Delta'$ si et seulement si les conditions b) et c) de la question précédente sont satisfaites.
   (Pour la suffisance, on demande la construction explicite d'une telle isométrie f. On pourra se placer dans des repères adaptés ou bien utiliser un argument plus géométrique).
4. Existe-t-il une isométrie affine f transformant la première bi-droite de la figure suivante en la seconde ? Justifier votre réponse.

D $\quad D'$ $\qquad\qquad \Delta'$

Δ

Partie III-2

On se propose ici de faire une description explicite du sous-groupe $G \subset Iso(\mathbb{R}^3)$ des isométries affines f telles que $f(D \cup D') = D \cup D'$. On notera $G^+ = G \cap Iso^+(\mathbb{R}^3)$ et $G^- = G \cap Iso^-(\mathbb{R}^3)$.

(Il est conseillé de faire une figure de la bi-droite et, à partir de la question 2) d'utiliser l'expression de $f \in G$ dans le repère $(O, \overrightarrow{e}, \overrightarrow{e'}, \overrightarrow{e''})$.)

1. Montrer que $O = bar \begin{pmatrix} A & A' \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ est un point fixe commun aux éléments de G.
2. Montrer que G^+ est constitué de Id_E et de trois demi-tours r'', r^+ et r^- d'axes respectifs D'', $D^+ = O + Vect(\overrightarrow{e} + \overrightarrow{e'})$ et $D^- = O + Vect(\overrightarrow{e} - \overrightarrow{e'})$.
   (Indication : considérer séparément les cas $f(D) = D$ et $F(D) = D'$)
3. Montrer que si $< \overrightarrow{e} | \overrightarrow{e'} > \neq 0$, alors $G^- = \emptyset$.
4. On suppose $< \overrightarrow{e} | \overrightarrow{e'} >= 0$. Montrer que G^- est constitué de deux réflexions σ, σ' de plans fixes contenant respectivement D,D'' et D',D'' et de deux isométries $\sigma^+ = s \circ \rho''$, $\sigma^- = s \circ \rho''^{-1}$ où s est une réflexion dont on déterminera le plan fixe et ρ'' est une rotation dont on déterminera l'axe et l'angle.
5. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des bi-droites gauches de $\mathbb{R}^3$. En conclusion, l'opération

$$\varphi : \begin{array}{ccc} Iso(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ (f, D \cup D') & \longmapsto & f\,(D \cup D') \end{array}$$

   est-elle transitive ? est-elle simple ? Combien y a-t-il d'orbites ?
6. $(*)$ On suppose $< \overrightarrow{e} | \overrightarrow{e'} >= 0$. On désigne par $< \sigma^+ >$ le sous-groupe de G constitué des itérées $(\sigma^+)^n, n \in \mathbb{Z}$.
   (a) Calculer $\sigma \circ \sigma^+ \circ \sigma^{-1}$
   (b) Montrer que tout élément de $G \backslash < \sigma^+ >$ s'écrit sous la forme $\sigma \circ (\sigma^+)^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.
   (c) En considérant les sous-groupes $< \sigma >= \{Id_E, \sigma\}$ et $< \sigma^+ >$, montrer que G est isomorphe au groupe des isométries du plan qui stabilisent l'ensemble des sommets d'un carré.