Révisions pour l'Examen

Corrigé

Exercice 1

$\longrightarrow$ Fait en TD.

Exercice 2

$\longrightarrow$ Fait en TD.

Exercice 3

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3. Soient P_1 et P_2 deux plans orthogonaux de E. Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P_1}$.

On note s_1 et s_2 les symétries orthogonales par rapport à P_1 et P_2. Soit r la symétrie orthogonale par rapport à une droite D qui est contenue dans P_1 et orthogonale à P_2.

1. **Quelles sont les natures des isométries suivantes :**

$$f = s_2 \circ r, \qquad g = s_1 \circ t_{\overrightarrow{u}}$$

Le fait que P_1 et P_2 soient deux plans orthogonaux impliquent que $\overrightarrow{P_1} = Vect(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ et $\overrightarrow{P_2} = Vect(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3})$ où $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une base orthonormée de $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{e_1}$ désignant un vecteur directeur de la droite $P_1 \cap P_2$. (faire un dessin...)

Ecrivons matriciellement les parties linéaires de s_1, s_2 et r dans la base $\mathcal{B}$:

$$mat_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{s_1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad mat_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{s_2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad mat_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{r}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Etudions f : f est un antidéplacement de l'espace, en tant que composée d'un antidéplacement (s_2) et d'un déplacement r.

Avec les écritures matricielles, on obtient directement :

$$\overrightarrow{f} = -Id_{\overrightarrow{E}}$$

Comme 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$, l'application affine f admet un unique point fixe : c'est une symétrie centrale par rapport à ce point.

Comme les plans P_2 et la droite D s'intersectent en un point Ω, c'est un point fixe pour f (et donc le seul).

En conclusion, f est la <u>symétrie centrale par rapport à $D \cap P_2$.</u>

Etudions g : g est un antidéplacement de l'espace, en tant que composée d'un antidéplacement (s_1) et d'un déplacement r.

Comme $\overrightarrow{t_{\overrightarrow{u}}} = Id_{\overrightarrow{E}}$, on a $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{s_1}$ symétrie orthogonale par rapport au plan vectoriel $\overrightarrow{P}_1$.

Puisque 1 est valeur propre de $\overrightarrow{g}$, g admet soit un plan fixe, soit aucun point fixe. Or ici, g apparaît comme une symétrie glissée ($g = s_1 \circ t_{\overrightarrow{u}}$ avec $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P_1} = \mathrm{Ker}(\overrightarrow{g} - Id_{\overrightarrow{E}})$) donc g n'a pas de point fixe.

En conclusion, g est la <u>symétrie glissée par rapport au plan P_1 et de vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P_1}$</u>.

2. **L'isométrie $f \circ g$ est-elle un déplacement ou un antidéplacement ?**

f et g étant deux antidéplacements, l'isométrie $f \circ g$ est donc un déplacement (c'est donc soit une translation, soit une rotation, soit un vissage)

3. **Quelle est la nature de l'application linéaire associée $\overrightarrow{f \circ g}$?**
   $f \circ g$ étant un déplacement, on a $\overrightarrow{f \circ g} \in O^+(\overrightarrow{E})$. Comme $\overrightarrow{E}$ est de dimension 3, $\overrightarrow{f \circ g}$ est donc une rotation vectorielle.
4. **Quels sont les vecteurs fixes de $\overrightarrow{f \circ g}$?**
   On a $\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g} = \overrightarrow{s_2} \circ \overrightarrow{r} \circ \overrightarrow{s_1}$. Matriciellement, on obtient :
   $$mat_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f \circ g}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Ainsi $\overrightarrow{f \circ g}$ est une symétrie orthogonale (rotation d'angle π, ou demi-tour) par rapport à la droite vectorielle $Vect(\overrightarrow{e_3})$. Les vecteurs fixes sont donc ceux proportionnels à $\overrightarrow{e_3}$.

5. **Quels sont les points fixes de $f \circ g$?**
   $\overrightarrow{f \circ g}$ admet 1 comme valeur propre. Il ne peut pas y avoir un unique point fixe : soit $f \circ g$ n'a aucun point fixe (et alors on aura un vissage), soit ce sera un sous-espace affine de direction $Vect(\overrightarrow{e_3})$ (une droite dirigée par $\overrightarrow{e_3}$), et dans ce cas on aura une rotation.
   Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, alors $f \circ g = s_2 \circ r \circ s_1$ qui admet le point Ω comme point fixe. L'ensemble des points fixes est donc la droite $\Omega + Vect(\overrightarrow{e_3})$
   Si $\overrightarrow{u} \neq 0$, $f \circ g \circ t_{-\overrightarrow{u}}$ admet le point Ω comme point fixe : c'est alors une rotation, notée r_0 autour d'une droite D_0. Comme $\overrightarrow{u} \in (Vect(\overrightarrow{e_3}))^{\perp}$, on peut d'après l'exercice 1 décomposer :
   $$t_{\overrightarrow{u}} = r_0 \circ r_1$$
   où r_1 est une symétrie orthogonale par rapport à une droite D_1 telle que $D_1 = t_{-\overrightarrow{u}/2}(D_0)$
   Ainsi,
   $$f \circ g = r_0 \circ t_{\overrightarrow{u}} = r_1$$
   et donc $f \circ g$ est un demi-tour qui a pour points fixes la droite $D_1 = \Omega - \dfrac{\overrightarrow{u}}{2} + Vect(\overrightarrow{e_3})$.
6. **Quelle est la nature de l'isométrie $f \circ g$?**
   On a donc montré dans la question précédente que $f \circ g$ est une rotation d'angle π, (un demi-tour ou une symétrie orthogonale) autour de l'axe
   $$D = \Omega - \frac{1}{2}\overrightarrow{u} + Vect(\overrightarrow{e_3})$$

Exercice 4

Dans cet exercice, E désigne un espace affine euclidien. On se donne deux isométries f et g de E. On suppose par ailleurs que f et g possèdent des points fixes et qu'elles commutent. On se propose de démontrer que f et g ont au moins un point fixe en commun.

1. **Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}$ des points fixes de f est un sous-esp. affine de E et décrire sa direction $\overrightarrow{\mathcal{F}}$.**
   On sait par hypothèse que f possède des points fixes, donc $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
   Soit O un point de $\mathcal{F}$. On a donc $f(O) = O$ et pour tout point M de E,
   $$\begin{aligned} M \in \mathcal{F} &\iff f(M) = M \\ &\iff \overrightarrow{Of(M)} = \overrightarrow{OM} \\ &\iff \overrightarrow{f(O)f(M)} = \overrightarrow{OM} \\ &\iff \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM} \\ &\iff \overrightarrow{OM} \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}) \\ &\iff M \in O + \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}) \end{aligned}$$
   Ainsi, $\mathcal{F}$ s'écrit clairement comme un sous-espace affine de E dont la direction est $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}})$.

2. **Démontrer que le sous-espace affine $\mathcal{F}$ est invariant par g, autrement dit $g(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.**
On sait que f et g commutent.
On a, pour tout $A \in \mathcal{F}$, $f(A) = A$ d'où :
$$g(A) = g(f(A)) = f(g(A))$$
donc $g(A)$ est un point fixe de f.
On a montré ainsi que $g(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$. Or g est bijective (car g est une isométrie), donc puisque $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de E, $g(\mathcal{F})$ est un sous-espace affine de même dimension que $\mathcal{F}$, inclus dans $\mathcal{F}$:
$$g(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$$

3. **Soit Ω un point fixe de g et ω la projection orthogonale de Ω sur $\mathcal{F}$. Démontrer que ω est un point fixe commun à f et g. *(Indication : on pourra montrer que g laisse stable le sous-espace $\Omega + \overrightarrow{\mathcal{F}}$)***

Suivons l'indication. Soit $A \in \Omega + \overrightarrow{\mathcal{F}}$. Il existe $B, C \in \mathcal{F}$ tels que $A = \Omega + \overrightarrow{BC}$.
On a alors :
$$g(A) = g(\Omega + \overrightarrow{BC}) = g(\Omega) + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{BC}) = \Omega + \overrightarrow{g(B)g(C)}$$
Or $g(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ d'où $g(B), g(C) \in \mathcal{F}$. On a donc montré que
$$g(A) \in \Omega + \overrightarrow{\mathcal{F}}$$
De même que précédemmment, g étant bijective et l'espace $\Omega + \overrightarrow{\mathcal{F}}$ étant un sous-espace affine, g conserve les dimensions et on a finalement que g laisse stable le sous-espace $\Omega + \overrightarrow{\mathcal{F}}$, autrement dit $\overrightarrow{g}$ stabilise $\overrightarrow{\mathcal{F}}$.
On peut donc en déduire que $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}) = \overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}$ car g est une isométrie.

Soit à présent ω la projection orthogonale de Ω sur $\mathcal{F}$.
Par définition, on a $\omega \in \mathcal{F}$: on a bien $f(\omega) = \omega$.
De plus, $\omega = \Omega + \overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}$. On a alors $g(\omega) = g(\Omega) + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{u}) = \Omega + \overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}$.
On a donc :
$$\overrightarrow{\Omega g(\omega)} \in \overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}, \qquad \text{et} \qquad g(\omega) \in g(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$$
Autrement dit, $g(\omega)$ est la projection orthogonale de Ω sur $\mathcal{F}$, c'est-à-dire ω.
Ainsi $g(\omega) = \omega$.

4. **Que peut-on alors dire dans le cas où l'on a de plus $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{g}$?**
f et g ont un point fixe en commun ω. Alors,
$$\forall M \in E, f(M) = f(\omega + \overrightarrow{\omega M}) = f(\omega) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\omega M}) = g(\omega) + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{\omega M}) = g(M)$$
Ainsi on a dans ce cas $f = g$.

Exercice 5

Soient E un plan affine euclidien et $f : E \to E$ une symétrie glissée par rapport à une droite D (autrement dit, il existe $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}$ tel que $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ s_D = s_D \circ t_{\overrightarrow{u}}$).
Soit O un point de E qui n'appartient pas à D. On note X la partie de E formée des points $f^n(O), n \in \mathbb{Z}$.
Soit G le groupe des isométries g de E telles que $g(X) = X$. On se propose de déterminer G.

On notera D' la droite parallèle à D passant par O et D'' la droite parallâle à D passant par $f(O)$.

1. **Montrer que G contient le groupe formé des $f^k, k \in \mathbb{Z}$.**
Soit $k \in \mathbb{Z}$. Soit $A \in X$: il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $A = f^n(O)$, on a
$$f^k(A) = f^k\big(f^n(O)\big) = f^{k+n}(O) \in X$$
Donc on a bien $\forall k \in \mathbb{Z}, f^k \in G$.

2. **Montrer que pour tout élément g de G, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f^n \circ g$ appartient à G et admet O pour point fixe.**
Soit $g \in G$. Puisque $O \in X$ et $g \in G$, on peut écrire $g(O) = f^{-n}(O)$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$.
On a alors $f^n \circ g \in G$ puisque $f^n \in G$ et $g \in G$. On a de plus $f^n \circ g(O) = O$, autrement dit O est point fixe de $f^n \circ g$.

3. **Montrer que D' et D'' sont les seules droites de E contenant trois points distincts deux à deux de X. En déduire que tout $g \in G$ laisse stable la réunion $D' \cup D''$.**

Soit D_0 une droite de E qui contient trois points (distincts) de X. Parmi ces points, il y en a au moins deux qui sont du même côté de D (et distincts).

Ainsi, D_0 doit être la droite parallèle à $\mathcal{D}$ passant par ces deux points. Donc D_0 est égale à D' ou D''.

En particulier, l'image par g de D' est une droite contenant trois points de $g(X) = X$. Donc elle est égale à D' ou D''.

4. **Montrer que l'on a $g(D) = D$ pour tout $g \in G$.**

D'après la question précédente, la transformation g laisse stable la réunion $D' \cup D''$. Donc elle laisse stable l'ensemble des milieux d'un point de D' et de D'', c'est-à-dire l'ensemble D.

5. **Soit g une transformation dans G qui admet O pour point fixe. Montrer que g est soit Id_E soit la symétrie orthogonale σ par rapport à la droite orthogonale à D passant par O.**

La transformation g laisse stable la droite D : $g_{|D|}$ est une isométrie de l'espace affine D.

Si $g_{|D|} = Id_D$, g fixe au moins trois points non alignés de E (O et au moins deux points de D), donc $g = Id_E$.

Si $g_{|D|} \neq Id_D$, $g_{|D|}$ sera la symétrie centrale par rapport au projeté orthogonal de O sur D et g est donc la symétrie orthogonale σ par rapport à la droite orthogonale à D passant par O.

6. **Montrer que tout élément g de G est de la forme $f^n \circ \sigma^\varepsilon$, où $\varepsilon \in \{0, 1\}$, et $n \in \mathbb{Z}$.**

Soit $g \in G$. On sait qu'il existe un certain $n \in \mathbb{Z}$ tel que $g(O) = f^n(O)$. Alors, la transformation $f^{-n} \circ g$ appartient à G et admet O comme point fixe. D'après la question c'est soit Id_E soit σ.

Si $f^{-n} \circ g = Id_E$, on a $g = f^n$.

Si $f^{-n} \circ g = \sigma$, on a $g = f^n \circ \sigma$.

Exercice 6

On considère k hyperplans $H_1, \ldots, H_k$ d'un espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{E}$. On note $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ les réflexions correspondantes et $\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_k}$ des vecteurs unitaires tels que $H_i^\perp = Vect(\overrightarrow{x_i})$ pour tout $i = 1..k$.

Soit G le sous-groupe de $O(\overrightarrow{E})$ engendré par les réflexions σ_i (c'est-à-dire le sous-groupe de $O(\overrightarrow{E})$ dont les éléments sont les compositions d'un nombre fini de σ_i, pour $i = 1..k$).

1. **Déterminer l'ensemble des points fixes communs à tous les éléments de G :**

$$\overrightarrow{E}^G = \{\overrightarrow{x} \in E \ / \ \forall g \in G, g(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}\}$$

Une réflexion σ_i par rapport à l'hyperplan H_i admet pour ensemble de points fixes H_i. L'ensemble des $\overrightarrow{x}$ qui sont fixes par tous les σ_i est donc inclus dans l'intersection de tous les H_i : $\overrightarrow{E}^G \subset \bigcap_{i=1}^{k} H_i$.

Réciproquement, si $\overrightarrow{x} \in \bigcap_{i=1}^{k} H_i$, alors $\overrightarrow{x}$ est fixé par tous les σ_i, $i = 1 \ldots k$. donc $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E}^G$. On a donc :

$$\overrightarrow{E}^G = \bigcap_{i=1}^{k} H_i$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les $\overrightarrow{x_i}$ pour que $\overrightarrow{E}^G = \{\overrightarrow{0}\}$.
(Indication : utiliser l'égalité** $(V \cap V')^\perp = V^\perp + V'^\perp$**)

On a

$$\overrightarrow{E}^G = \{\overrightarrow{0}\} \Longleftrightarrow \left(\overrightarrow{E}^G\right)^\perp = \overrightarrow{E} \Longleftrightarrow \left(\bigcap_{i=1}^{k} H_i\right)^\perp = \overrightarrow{E}$$

.

D'après la formule donnée par l'indication, on sait que

$$\left(\bigcap_{i=1}^{k} H_i\right)^\perp = \sum_{i=1}^{k} H_i^\perp = \sum_{i=1}^{k} Vect(\overrightarrow{x_i}) = Vect(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_k})$$

On a ainsi

$$\overrightarrow{E}^G = \{\overrightarrow{0}\} \iff \overrightarrow{E} = Vect(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_k}) \iff$$

autrement dit, $\overrightarrow{E}^G = \{\overrightarrow{0}\}$ si et seulement si la famille $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_k})$ est génératrice de $\overrightarrow{E}$.

2. **Etant donné $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E} \backslash \{\overrightarrow{0}\}$, on désigne par $\sigma_{<\overrightarrow{x}>^\perp}$ la réflexion d'hyperplan $(Vect(\overrightarrow{x}))^\perp$. On considère le sous-ensemble**

$$\Delta = \{\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E} \ / \ \|\overrightarrow{x}\| = 1 \textbf{ et } \exists i = 1..k, \exists g \in G \textbf{ tels que } \sigma_{<\overrightarrow{x}>^\perp} = g^{-1} \circ \sigma_i \circ g\}$$

Montrer que Δ est globalement invariant sous l'action de G, ie $\forall g \in G, g(\Delta) \subset \Delta$.

Soit $\overrightarrow{x} \in \Delta$ et soit $g \in G$. Montrons que $g(\overrightarrow{x}) \in \Delta$.
Rappel du TD 4 (à savoir) : si s_A désigne la symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace A, et si $g \in O(\overrightarrow{E})$, on a

$$g \circ s_A \circ g^{-1} = s_{g(A)}$$

On a donc

$$s_{<g(\overrightarrow{x})>^\perp} = g \circ s_{<\overrightarrow{x}>^\perp} \circ g^{-1}$$

Comme $\overrightarrow{x} \in \Delta$, on sait que $\exists i = 1..k, \exists g_1 \in G$ tels que $\sigma_{<\overrightarrow{x}>^\perp} = g_1 \circ \sigma_i \circ g_1^{-1}$.
En conclusion :

$$s_{<g(\overrightarrow{x})>^\perp} = g^{-1} \circ s_{<\overrightarrow{x}>^\perp} \circ g^{-1} = (g \circ g_1) \circ s_i \circ (g \circ g_1)^{-1}$$

En particulier $g(\overrightarrow{x}) \in \Delta$.

3. **Montrer que si Δ est fini et si $\overrightarrow{E}^G = \{\overrightarrow{0}\}$, alors G est fini.**

(Indication : soit $\mathcal{S}_\Delta$ le groupe des permutations de Δ. Montrer que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} G & \to & \mathcal{S}_\Delta \\ g & \mapsto & g_{|\Delta} \end{array}$ ***est injective)***

On a montré dans la question précédente que Δ est stable par tout $g \in G$. On a donc une action naturelle du groupe G sur l'ensemble Δ et l'application $\varphi : g \mapsto g_{|\Delta}$ est un morphisme de groupes entre G et $\mathcal{S}_\Delta$.
Si Δ est fini de cardinal m, alors $\mathcal{S}_\Delta$ est fini de cardinal $m!$.
Si $\overrightarrow{E}^G = \{\overrightarrow{0}\}$, on a vu que la famille $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_k})$ est génératrice de $\overrightarrow{E}$. Ainsi, tout $f \in \mathcal{L}(E)$ est caractérisé par son action sur les vecteurs $\overrightarrow{x_i}$, donc par son action sur Δ qui contient les $\overrightarrow{x_i}$. Ainsi, dans ce cas l'application φ est injective.

Lorsque les deux conditions sont réalisées simultanément, alors l'application φ réalise une injection de G dans un groupe fini, donc G est un groupe fini.

4. **Soit $\overrightarrow{E} = \mathbb{R}^n$, $(\overrightarrow{e_i})_{i=1..n}$ la base canonique et $H_i = (\mathbb{R}\overrightarrow{e_i})^\perp$ pour $i = 1..n$.**
Montrer que G est un groupe abélien et déterminer son cardinal. Déterminer Δ.

Soient $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$. Soit $\overrightarrow{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \overrightarrow{e_k}$.
On a

$$\sigma_i \circ \sigma_j(\overrightarrow{x}) = \sigma_i \left(\sum_{k \neq j} x_k \overrightarrow{e_k} - x_j \overrightarrow{e_j} \right) = \sum_{k \neq i,j} x_k \overrightarrow{e_k} - x_i \overrightarrow{e_i} - x_j \overrightarrow{e_j} = \sigma_j \circ \sigma_i(\overrightarrow{x})$$

Ainsi, le groupe G est bien abélien.

On en déduit que

$$\Delta = \{\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E} \ / \ \|\overrightarrow{x}\| = 1 \text{ et } \exists i = 1..n, \ \sigma_{<\overrightarrow{x}>^\perp} = \sigma_i\} = \{\pm \overrightarrow{e_i}, \ i = 1, 2, \dots, n\}$$

Enfin, tout $g \in G$ va s'écrire de manière unique

$$g = \sigma_1^{\alpha_1} \circ \sigma_2^{\alpha_2} \circ \dots \circ \sigma_n^{\alpha_n}, \qquad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{0, 1\}$$

puisque les σ_i commutent et $\sigma_i^2 = Id_{\overrightarrow{E}}$.
Comme chaque facteur possède 2 possibilités selon la puissance de σ_i, on en déduit que

$$Card(G) = 2^n$$

Exercice 7 (Examen Décembre 2007)

Soit E l'espace affine $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel $< .|. >$ et de la distance euclidienne d usuelle. La direction d'un sous-espace affine $A \subset \mathbb{R}^n$ est notée $\overrightarrow{A}$. Deux sous-espaces affines sont dit orthogonaux si leurs directions sont orthogonales.

Partie I

Soient A et B deux sous-espaces affines de $\mathbb{R}^n$ tels que $\overrightarrow{A} \cap \overrightarrow{B} = \{\overrightarrow{0}\}$

1. (a) **Soit $(a, b) \in A \times B$. Justifier l'existence et l'unicité de vecteurs $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{A}, \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{A}^{\perp} \cap \overrightarrow{B}^{\perp}$ tels que**
$$\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$$

On sait que
$$\mathbb{R}^n = \left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\right) \oplus \left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\right)^{\perp}$$

Or, on sait (vu en TD) que $\left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\right)^{\perp} = \overrightarrow{A}^{\perp} \cap \overrightarrow{B}^{\perp}$.
Puisque $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ sont tels que $\overrightarrow{A} \cap \overrightarrow{B} = \{\overrightarrow{0}\}$, on a $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = \overrightarrow{A} \oplus \overrightarrow{B}$.
En conclusion :
$$\mathbb{R}^n = \overrightarrow{A} \oplus \overrightarrow{B} \oplus \overrightarrow{A}^{\perp} \cap \overrightarrow{B}^{\perp}$$

Ainsi, puisque $\overrightarrow{ab} \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique triplet $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} \times \overrightarrow{A}^{\perp} \cap \overrightarrow{B}^{\perp}$ tel que
$$\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$$

(b) **Montrer qu'il existe un couple $(A_0, B_0) \in A \times B$ tel que $\overrightarrow{A_0B_0} \in \overrightarrow{A}^{\perp} \cap \overrightarrow{B}^{\perp}$. Montrer qu'un tel couple est unique.**
Pour tout couple $(a, b) \in \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$, on a
$$b = a + \overrightarrow{ab} = a + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}, \quad \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{A}, \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{B}, \overrightarrow{w} \in \overrightarrow{A}^{\perp} \cap \overrightarrow{B}^{\perp}$$

On a alors
$$b - \overrightarrow{v} = a + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$$

autrement dit
$$\overrightarrow{(a + \overrightarrow{u})(b - \overrightarrow{v})} = \overrightarrow{w} \in \overrightarrow{A}^{\perp} \cap \overrightarrow{B}^{\perp}$$

En posant $A_0 = a + \overrightarrow{u}$ et $B_0 = b - \overrightarrow{v}$, on a bien l'existence de (A_0, B_0) tel que $\overrightarrow{A_0B_0} \in \overrightarrow{A}^{\perp} \cap \overrightarrow{B}^{\perp}$

Montrons l'unicité du couple (A_0, B_0).
Supposons qu'il existe $(A'_0, B'_0) \in \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$ tel que $\overrightarrow{A'_0B'_0} \in \overrightarrow{A}^{\perp} \cap \overrightarrow{B}^{\perp}$.
On a
$$\overrightarrow{A'_0B'_0} = \overrightarrow{A'_0A_0} + \overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{B_0B'_0}$$

autrement dit :
$$\overrightarrow{A'_0A_0} + \overrightarrow{B_0B'_0} = \overrightarrow{A'_0B'_0} - \overrightarrow{A_0B_0} \in \overrightarrow{A}^{\perp} \cap \overrightarrow{B}^{\perp} \cap (\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) = (\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B})^{\perp} \cap (\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B})$$

Ainsi, on a $\overrightarrow{A'_0A_0} + \overrightarrow{B_0B'_0} = \overrightarrow{0}$.
Or $\overrightarrow{A'_0A_0} + \overrightarrow{B_0B'_0} \in \overrightarrow{A} \oplus \overrightarrow{B}$, donc par unicité de la décomposition, on a $\overrightarrow{A'_0A_0} = \overrightarrow{B_0B'_0} = \overrightarrow{0}$, autrement dit $(A_0, B_0) = (A'_0, B'_0)$.

(c) **Montrer que si (A_0, B_0) vérifie la condition du b), alors on a**
$$\forall (a, b) \in A \times B, \quad d(A_0, B_0) \leq d(a, b)$$

On a
$$d(a, b) = \|\overrightarrow{ab}\|^2 = \|\overrightarrow{aA_0} + \overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{B_0b}\|^2 \geq \|\overrightarrow{A_0B_0}\|^2 = d(A_0, B_0)$$

2. **On pose $k = n - \dim(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B})$.**

   (a) **Montrer à l'aide du 1.b) qu'il existe un unique sous-espace affine C de E de dimension k, orthogonal à A et à B et tel que $A \cap C \neq \emptyset$ et $B \cap C \neq \emptyset$.**

   La direction de C, notée $\overrightarrow{C}$ doit vérifier $\overrightarrow{C} \perp \overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{C} \perp \overrightarrow{B}$ et $\dim(\overrightarrow{C}) = n - \dim(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B})$.
   On a donc nécessairement
   $$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A}^{\perp} \cap \overrightarrow{B}^{\perp}$$
   Si on prend $C = A_0 + \overrightarrow{A}^{\perp} \cap \overrightarrow{B}^{\perp}$, on a $A_0 \in A \cap C$ et
   $$B_0 = A_0 + \overrightarrow{A_0B_0} \in A_0 + \overrightarrow{A}^{\perp} \cap \overrightarrow{B}^{\perp} = C \cap$$
   Donc on a l'existence d'un sous-espace affine C vérifiant les conditions voulues.

   Supposons que C' convienne également. Nécessairement, on a
   $$\overrightarrow{C'} = \overrightarrow{A}^{\perp} \cap \overrightarrow{B}^{\perp}$$
   On sait qu'il existe $A_0' \in A \cap C'$ et $B_0' \in B \cap C'$. On a alors $\overrightarrow{A_0'B_0'} \in \overrightarrow{A}^{\perp} \cap \overrightarrow{B}^{\perp}$. D'après la question 1.b), on a donc $A_0' = A_0$ et $B_0' = B_0$ et ainsi
   $$C' = A_0 + \overrightarrow{A}^{\perp} \cap \overrightarrow{B}^{\perp} = C$$

   (b) **Que peut-on dire de $A \cap C$ et de $B \cap C$ (Justifier votre réponse).**

   On a montré que $A_0 \in A \cap C$. De plus, $A \cap C$ est un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{A} \cap \overrightarrow{C} = \{\overrightarrow{0}\}$. En conclusion, on a $A \cap C = \{A_0\}$.
   De même, $B \cap C = \{B_0\}$.

On supposera dans la suite que $n = 3$. On appelle perpendiculaire commune aux droites affines D et D' toute droite affine D'' qui coupe D et D' orthogonalement.

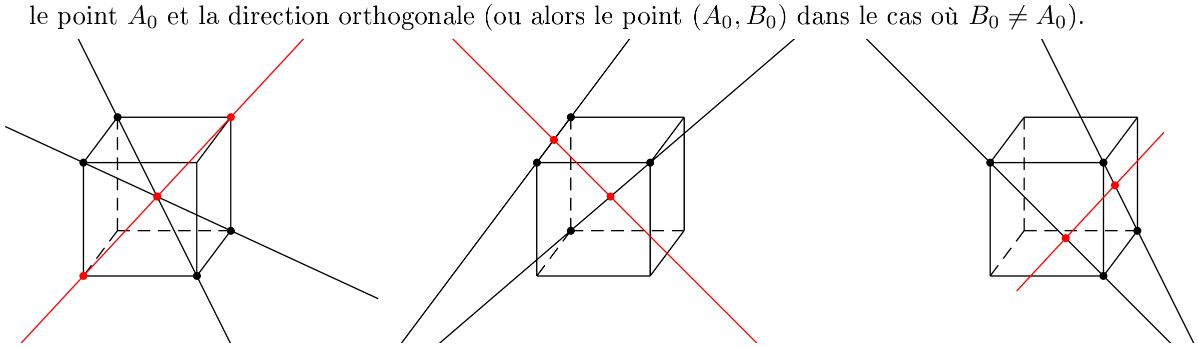
3. **On suppose D et D' non parallèles.**

   (a) **Justifier l'existence et l'unicité de la perpendiculaire commune D'' à D et D'.**

   D et D' sont deux droites non parallèles, on a donc $\overrightarrow{D} \cap \overrightarrow{D'} = \{\overrightarrow{0}\}$. C'est un cas particulier de ce qui précède avec ici $\dim(A) = \dim(B) = 1$.
   Ainsi, $\dim(C) = \dim(\mathbb{R}^3 - \dim(A) - \dim(B) = 3 - 2 = 1$. C est donc une droite D'' perpendiculaire à D et à D'.

   (b) **Soit $\mathcal{C} \subset (\mathbb{R}^+)^3$ le cube unité porté par le repère canonique $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. Donner deux points et faire le tracé de la perpendiculaire commune pour chacune des trois paires de droites de la figure (justifier votre réponse).**

   On va construire explicitement la perpendiculaire commune. Il faut pour chacun des trois cas, déterminer le point A_0 et la direction orthogonale (ou alors le point (A_0, B_0) dans le cas où $B_0 \neq A_0$).



$$A_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad A_0 = \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right) \qquad A_0 = \left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$D'' = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \qquad B_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad B_0 = \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{2}{3}\right)$$

Partie II

On appelle m-droite de $\mathbb{R}^3$ toute réunion $\mathbb{D} = \bigcup_{i=1..m} D_i$ de m droites affines deux à deux distinctes.

On se propose d'étudier certaines propriétés de l'action du groupe des isométries affines $Iso(\mathbb{R}^3)$ sur l'ensemble des m-droites. On commence par le groupe affine $GA(\mathbb{R}^3)$.

1. **Montrer que l'image d'une m-droite par une bijection affine f est une m-droite.**
   On sait que f est une bijection affine. Alors si D_i est une droite affine, $f(D_i)$ est encore une droite affine.
   Alors si $\mathbb{D} = \bigcup_{i=1..m} D_i$ est une m-droite, $f(\mathbb{D}) = \bigcup_{i=1..m} f(D_i)$ est une réunion de m droites affines.
   Si jamais on avait $f(D_i) = f(D_j)$ avec $i \neq j$, alors $f^{-1}(f(D_i)) = f^{-1}(f(D_j))$, i.e. $D_i = D_j$, ce qui est impossible puisque $\mathbb{D}$ est une m-droite. Les $f(D_i)_i$ sont donc toutes distinctes.

2. **Soient $\mathbb{D} = \bigcup_{i=1..m} D_i$ et $\mathbf{\Delta} = \bigcup_{i=1..m} \Delta_i$ deux m-droites et f une bijection affine telle que $f(\mathbb{D}) = \mathbf{\Delta}$. Montrer que pout tout i, il existe j tel que $f(D_i) = \Delta_j$.**
   On sait que D_i est une droite affine. Comme $f(D_i) \subset \mathbf{\Delta}$ et $f(D_i)$ est une droite incluse dans $\mathbf{\Delta}$: il existe donc au moins une droite $\Delta_j \subset \mathbf{\Delta}$ telle que $f(D_i) = \Delta_j$.
   (En effet, $f(D_i)$ contient une infinité de points et intersecte donc l'une des droites Δ_j en au moins deux poins. Elle concide donc avec cette droite.)

3. **On suppose $m = 3$. Donner, en justifiant votre réponse, un exemple de deux tri-droites $\mathbb{D}$ et $\mathbf{\Delta}$ pour lesquelles :**
   (i) il n'existe aucune bijection affine f telle que $f(\mathbb{D}) = \mathbf{\Delta}$.
   (ii) il existe une infinité de bijection affines f telles que $f(\mathbb{D}) = \mathbf{\Delta}$.
   (iii) il existe exactement six bijections affines telles que $f(\mathbb{D}) = \mathbf{\Delta}$.
   Pour le cas (i), il suffit de prendre trois droites parallèles puis trois droites concourantes.
   Pour le cas (ii), il suffit de prendre trois droites concourantes en un point O et $\mathbf{\Delta} = \mathbb{D}$. (Les homothéties de centre O préservent les droites).
   Pour le cas (iii), il suffit de prendre deux triplexes de droites.

Partie III-1

On suppose $m = 2$. On dit qu'une paire de droites (D, D') est gauche si D et D' sont non parallèles et non sécantes.

Dans cette partie, (D, D') et (Δ, Δ') désignent deux paires de droites gauches, de perpendiculaires communes respectives D'' et Δ''. On note $\overrightarrow{e}, \overrightarrow{e'}, \overrightarrow{e''}$ (resp. $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{u''}$) des vecteurs directeurs unitaires de D, D', D'' (resp. de $\Delta, \Delta', \Delta''$) et

$$\{A\} = D \cap D'', \quad \{A'\} = D' \cap D'', \quad \{\alpha\} = \Delta \cap \Delta'', \quad \{\alpha'\} = \Delta' \cap \Delta''$$

1. **Soit $f \in Iso(\mathbb{R}^3)$. Montrer que l'image $(f(D), f(D'))$ est une paire gauche.**
   Puisque D et D' sont deux droites ne s'intersectant pas et que f est bijective , $f(D)$ et $f(D')$ sont deux droites affines de $\mathbb{R}^3$ ne s'intersectant pas également.
   De plus, puisque $(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{e'})$ est libre, on a f bijective $\Leftrightarrow \overrightarrow{f}$ bijective et donc $(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{e'}))$ est libre également : les droites $f(D)$ et $f(D')$ ne sont donc pas parallèles.
   $(f(D), f(D'))$ est donc bien une paire gauche.

2. **On suppose qu'il existe une isométrie affine f telle que $f(D) = \Delta$ et $f(D') = \Delta'$.**
   (a) **Montrer que $f(D'') = \Delta''$.**
   f est une isométrie affine, on a donc $\overrightarrow{f} \in O(\overrightarrow{E})$ qui conserve l'orthogonalité. Ainsi, pour tout sous-espace vectoriel $\overrightarrow{V}$, on a
   $$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{V}^{\perp}) = \left(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{V})\right)^{\perp}$$
   Par hypothèse $f(D) = \Delta$ et $f(D') = \Delta'$. On en déduit donc que
   $$\overrightarrow{f}(Vect(\overrightarrow{e})) = Vect(\overrightarrow{u}), \qquad \overrightarrow{f}(Vect(\overrightarrow{e'})) = Vect(\overrightarrow{u'})$$

Pour $\overrightarrow{V} = Vect(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{e'})$, on a $\overrightarrow{V}^{\perp} = Vect(\overrightarrow{e''})$.
Ainsi, $\overrightarrow{f}(Vect(\overrightarrow{e''})) = (Vect(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}'))^{\perp}$ et $f(D'')$ est une droite orthogonale à Δ et à Δ'.
De plus, $A = D \cap D''$. Ainsi $f(A) = f(D \cap D'') = f(D) \cap f(D'') = \Delta \cap f(D'')$.
De même, on aura $f(A') = \Delta' \cap f(D'')$.
Ainsi $f(D'') =< f(A), f(A') >$: c'est l'unique perpendiculaire commune à Δ et Δ', ie $f(D'') = \Delta''$.

(b) **En déduire que $d(A, A') = d(\alpha, \alpha')$.**
On a donc montré dans la question précédente que $f(A) = \alpha$ et $f(A') = \Delta'$. Puisque f est une isométrie, on a :

$$d(\alpha, \alpha') = d(f(A), f(A')) = d(A, A')$$

(c) **Montrer que $< \overrightarrow{e}|\overrightarrow{e'} >= \pm < \overrightarrow{u}|\overrightarrow{u'} >$.**
Rapportée aux bases $(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{e'}, \overrightarrow{e''})$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{u''})$, la matrice de $\overrightarrow{f}$ est :

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a

$$< \overrightarrow{e}|\overrightarrow{e'} >=< \overrightarrow{f}(\overrightarrow{e})|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e'}) >= \pm < \overrightarrow{u}|\overrightarrow{u}' >$$

3. **Montrer qu'il existe une isométrie affine $f \in Iso(\mathbb{R}^3)$ telle que $f(D \cup D') = \Delta \cup \Delta'$ si et seulement si les conditions b) et c) de la question précédente sont satisfaites.**
(Pour la suffisance, on demande la construction explicite d'une telle isométrie f. On pourra se placer dans des repères adaptés ou bien utiliser un argument plus géométrique).
Condition nécessaire. Supposons qu'il existe $f \in Iso(\mathbb{R}^3)$ telle que $f(D \cup D') = \Delta \cup \Delta'$.
On a alors deux possibilités :
– soit $f(D) = \Delta$ et $f(D') = \Delta'$.
– soit $f(D) = \Delta'$ et $f(D') = \Delta$.
Dans les deux cas, les conditions b) et c) sont donc nécessairement satisfaites.

Condition suffiante. On va définir une isométrie f telle que $f(D) = \Delta$ et $f(D') = \Delta'$.
Quitte à changer le signe des vecteurs directeurs unitaires, on peut supposer que

$$< \overrightarrow{e}|\overrightarrow{e}' >=< \overrightarrow{u}|\overrightarrow{u}' >, \qquad \overrightarrow{AA'} = d(A, A').\overrightarrow{e''}, \qquad \overrightarrow{\alpha\alpha'} = d(A, A').\overrightarrow{u''}$$

On définit alors la bijection affine f par :

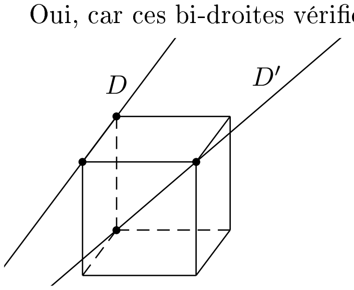
$$f(A) = \alpha, \quad \overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}) = \overrightarrow{u}, \quad \overrightarrow{f}(\overrightarrow{e'}) = \overrightarrow{u'}, \quad \overrightarrow{f}(\overrightarrow{e''}) = \overrightarrow{u''}$$

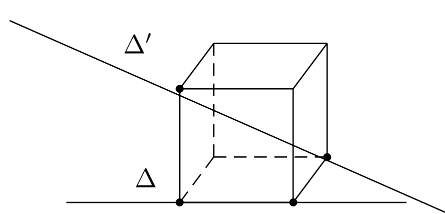
Ce f convient, car en effet $f(D) = \Delta$ et

$$f(D') = f(A' + \mathbb{R}\overrightarrow{e'}) = f(A + \overrightarrow{AA'}) + \mathbb{R}\overrightarrow{u'} = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AA'}) + \mathbb{R}\overrightarrow{u'} = \alpha + d(A, A').\overrightarrow{u''} + \mathbb{R}\overrightarrow{u'} = \alpha' + \mathbb{R}\overrightarrow{u'} = \Delta'$$

Comme $\overrightarrow{f}$ préserve les produits scalaires des vecteurs de base, f est bien une isométrie, qui convient au problème.

4. **Existe-t-il une isométrie affine f transformant la première bi-droite de la figure suivante en la seconde ? Justifier votre réponse.**
Oui, car ces bi-droites vérifient les conditions b) et c) du 2).





Partie III-2

On se propose ici de faire une description explicite du sous-groupe $G \subset Iso(\mathbb{R}^3)$ des isométries affines f telles que $f(D \cup D') = D \cup D'$. On notera $G^+ = G \cap Iso^+(\mathbb{R}^3)$ et $G^- = G \cap Iso^-(\mathbb{R}^3)$.

(Il est conseillé de faire une figure de la bi-droite et, à partir de la question 2) d'utiliser l'expression de $f \in G$ dans le repère $(O, \overrightarrow{e}, \overrightarrow{e'}, \overrightarrow{e''})$.)

1. **Montrer que $O = bar\begin{pmatrix} A & A' \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ est un point fixe commun aux éléments de G.**

   Soit $f \in G$. On a $f(D \cup D') = D \cup D'$.
   Si f préserve les deux droites, on a $f(A) = A$ et $f(A') = A'$.
   Si f permute les deux droites, on a $f(A) = A'$ et $f(A') = A$.
   Dans tous les cas, on a $f(\{A, A'\}) = f(\{A, A'\})$. Donc f préserve l'isobarycentre O de $\{A, A'\}$.

2. **Montrer que G^+ est constitué de Id_E et de trois demi-tours r'', r^+ et r^- d'axes respectifs D'', $D^+ = O + Vect(\overrightarrow{e} + \overrightarrow{e'})$ et $D^- = O + Vect(\overrightarrow{e} - \overrightarrow{e'})$.**
   (Indication : considérer séparément les cas $f(D) = D$ et $F(D) = D'$)

   On se place dans le repère $(O, \overrightarrow{e}, \overrightarrow{e'}, \overrightarrow{e''})$, on a alors pour tout point $M = (x, x', x'') \in E$,

$$f(M) = f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) = O + x\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}) + x'\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e'}) + x''\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e''})$$

   Si f conserve chaque droite , la matrice de $\overrightarrow{f}$ est alors du type $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Si f permute les droites , la matrice de $\overrightarrow{f}$ est alors du type $\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

   Pour que $\det(\overrightarrow{f}) = 1$, les seuls choix de signes sont donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   qui correspondent respetivement à $f = Id_E$, $f = r''$, $f = r^+$ et $f = r^-$

3. **Montrer que si $< \overrightarrow{e} | \overrightarrow{e'} > \neq 0$, alors $G^- = \emptyset$.**

   Pour que $\det(\overrightarrow{f}) = -1$, les seuls choix de signes sont donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Si $< \overrightarrow{e} | \overrightarrow{e'} > \neq 0$, ces matrices ne sont pas orthogonales.
   Par exemple pour le premier cas, on aurait

$$< \overrightarrow{f}(\overrightarrow{e}) | \overrightarrow{f}(\overrightarrow{e'}) > = - < \overrightarrow{e} | \overrightarrow{e}' > \neq < \overrightarrow{e} | \overrightarrow{e'} >$$

   De même pour les trois autres cas.

4. **On suppose $< \overrightarrow{e} | \overrightarrow{e'} > = 0$. Montrer que G^- est constitué de deux réflexions σ, σ' de plans fixes contenant respectivement D,D'' et D',D'' et de deux isométries $\sigma^+ = s \circ \rho''$, $\sigma^- = s \circ \rho''^{-1}$ où s est une réflexion dont on déterminera le plan fixe et ρ'' est une rotation dont on déterminera l'axe et l'angle.**

   Dans le cas où $< \overrightarrow{e} | \overrightarrow{e'} > = 0$, les quatres matrices du 3) sont orthogonales. Elles représentent alors respectivement $f = \sigma$, $f = \sigma'$, $f = s \circ \rho''$, $f = s \circ \rho''^{-1}$, où s est la réflexion de plan fixe $O + Vect(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{e'})$ et ρ'' est le quart de tour d'axe D''.

5. **Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des bi-droites gauches de $\mathbb{R}^3$. En conclusion, l'opération**

$$\varphi : \begin{array}{ccc} Iso(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ (f, D \cup D') & \longmapsto & f(D \cup D') \end{array}$$

est-elle transitive ? est-elle simple ? Combien y a-t-il d'orbites ?

L'action n'est pas transitive car d'après III-1.3 il faut que $d(D, D') = d(\Delta, \Delta')$ pour que deux bi-droites soient dans la même orbite.

L'action n'est pas simple car d'après III-2, G contient plusieurs éléments : le stabilisateur de $(D \cup D')$ n'est donc pas réduit à $\{Id_E\}$.

Il y a enfin une infinité d'orbites, puisque chacune dépendant de la valeur de $d(D, D')$, qui prend des infinités de valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

6. (∗) **On suppose $< \overrightarrow{e} | \overrightarrow{e'} >= 0$. On désigne par $< \sigma^+ >$ le sous-groupe de G constitué des itérées $(\sigma^+)^n, n \in \mathbb{Z}$.**

   (a) **Calculer $\sigma \circ \sigma^+ \circ \sigma^{-1}$**

   Comme σ et σ^+ fixent le point O, il suffit de regarder la partie linéaire de $\sigma \circ \sigma^+ \circ \sigma^{-1}$, qui a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   On a donc

$$\sigma \circ \sigma^+ \circ \sigma^{-1} = \sigma^-$$

   (b) **Montrer que tout élément de $G \backslash < \sigma^+ >$ s'écrit sous la forme $\sigma \circ (\sigma^+)^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.**

   Puisque toutes les applications considérées ici ont O pour point fixe, on peut identifier chaque application affine avec sa partie linéaire. On a :

$$mat(\sigma \circ \sigma^+) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = mat(r^-)$$

$$mat(\sigma \circ (\sigma^+)^2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = mat(\sigma')$$

$$mat(\sigma \circ (\sigma^+)^3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = mat(r^+)$$

$$mat(\sigma \circ (\sigma^+)^4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma$$

   On a bien obtenu toutes les applications de $G \backslash < \sigma^+ >$ car les autres peuvent s'écrire comme des puissances de σ^+ :

$$mat((\sigma^+)^2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = mat(r''), \quad mat((\sigma^+)^3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = mat(\sigma^-)$$

$$mat((\sigma^+)^4) = mat(Id_E)$$

   (c) **En considérant les sous-groupes $< \sigma >= \{Id_E, \sigma\}$ et $< \sigma^+ >$, montrer que G est isomorphe au groupe des isométries du plan qui stabilisent l'ensemble des sommets d'un carré.**

   On a donc montré finalement que G est engendré par deux éléments σ et σ^+ avec $(\sigma)^2 = Id_E$, $(\sigma^+)^4 = Id_E$ et $(\sigma \circ \sigma^+)^2 = (r^-)^2 = Id_E$.

   Donc, on sait d'après les TD que ceci caractérise G comme isomorphe au groupe diédral $\mathbb{D}_4$, qui est le groupe des isométries du plan qui stabilisent un polygone régulier à 4 côtés, c'est-à-dire un carré.