Révisions pour le Partiel

Exercice 1

Soit E un espace affine.

1. Trouver toutes les applications affines $f : E \to E$ qui commutent avec toutes les translations de E.
2. On rappelle que pour tout point A de E, la symétrie centrale de centre A désigne la symétrie affine par rapport à $\{A\}$ parallèlement à E, c'est-à-dire l'application affine $s_A : E \to E$ définie par :

$$\forall M \in E,\ \overrightarrow{As_A(M)} = -\overrightarrow{AM}$$

Montrer que, si une application affine f de E das E commute avec toutes les symétries centrales de E, alors $f = Id_E$

Exercice 2

Soit E un espace affine de dimension $n \geq 2$. Soient A, B, C, D quatre points non alignés de E.
Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) (A, B, C, D) est un parallélogramme, c'est-à-dire $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
(ii) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
(iii) (AB) est parallèle à (DC) et (AD) est parallèle à (BC)
(iv) (A, C) et (B, D) sont même isobarycentre

Exercice 3

Soient E un plan affine de direction $\overrightarrow{E}$ et A, B, C trois points non alignés de E.
On définit le point C' par la relation : $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}$.
Soit f l'application affine de E dans E définie par :

$$f(A) = A, \quad f(B) = B, \quad f(C) = C'$$

1. Montrer que f est bijective. Déterminer ses points fixes.
2. Montrer que pour tout point M de E, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe. Déterminer les droites globalement invariantes par f.
3. Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$ et $t_{\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.
   (a) Montrer que $t_{\overrightarrow{u}} \circ f$ est une application affine.
   (b) Comparer les parties linéaires de $t_{\overrightarrow{u}} \circ f$ et de f.
   (c) Déterminer l'ensemble des points invariants de $t_{\overrightarrow{u}} \circ f$ en fonction de $\overrightarrow{u}$.
4. (a) Soit G l'isobarycentre du triangle ABC. Construire $f(G)$.
   (b) Soit M un point quelconque du plan. Construire $f(M)$.

Exercice 4

Soient A, B, C, D quatre points non coplanaires d'un espace affine de dimension 3. On définit les points E, F, G par :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}, \quad G = bar\begin{pmatrix} C & D \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Donner des coordonnées barycentriques des points E, F, G dans le repère (A, B, C, D).
2. Soient H, M, N trois points de l'espace affine. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées barycentriques dans le repère (A, B, C, D) :
   (i) pour qu'un point M appartienne à la droite (EG)
   (ii) pour qu'un point N appartienne à la droite (HF), H étant un point de la droite (AD)
3. Montrer qu'il existe un unique point H de (AD) tel que les droites (EG) et (HF) soient concourantes.

Exercice 5

Soient E un plan affine de direction $\overrightarrow{E}$ et D une droite de E.
On appelle *transvection affine* de base D toute application affine $g : E \to E$ telle que, tout point de la droite D est invariant par g, et pour tout point M de E, $\overrightarrow{Mg(M)} \in \overrightarrow{D}$.

1. Si D' est une droite de E telle que $\overrightarrow{D'} \neq \overrightarrow{D}$, on note $s_{D'}$ la symétrie affine autour de D' parallèlement à $\overrightarrow{D}$.
   (a) Soient deux droites D_1, D_2 telles que D, D_1, D_2 soient distinctes et concourantes. Montrer que $h = s_{D_2} \circ s_{D_1}$ est une transvection affine de base D.
   (b) Soit g une transvection de base D. Montrer qu'il existe deux droites D_1 et D_2 de directions différentes de $\overrightarrow{D}$, telles que $g = s_{D_2} \circ s_{D_1}$.
2. Soit g une application affine. Montrer que g est une transvection affine de base D si et seulement si :
   (i) $\exists I \in D$ tel que $g(I) = I$
   (ii) $\exists \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{D}$, $\exists \overrightarrow{\varphi}$ forme linéaire de noyau $\overrightarrow{D}$ tels que :
   $$\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}, \quad \overrightarrow{g}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v}$$
   Lorsque $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, on dit que $\overrightarrow{g}$ est une transvection vectorielle de droite $\overrightarrow{D}$.
   Lorsque $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, on a $\overrightarrow{g} = Id_{\overrightarrow{E}}$
3. On considère une application affine g pour laquelle la propriété (ii) est vérifiée. Montrer à l'aide d'un exemple que g n'est pas nécessairement une transvection affine.
4. Soient g_1,g_2 deux transvections affines, différentes de Id, de bases respectives D_1 et D_2. On a alors :
   $$\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}, \quad \overrightarrow{g_i}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{\varphi_i}(\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v_i}, \qquad i = 1, 2$$
   Vérifier que $\overrightarrow{v_1} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v_2} \neq \overrightarrow{0}$.
   (a) On suppose $\overrightarrow{D_1} \neq \overrightarrow{D_2}$, $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ est alors une base de $\overrightarrow{E}$.
   Ecrire les matrices M_1 et M_2 associées respectivement à $\overrightarrow{g_1}$ et à $\overrightarrow{g_2}$ dans cette base. Montrer que M_1 et M_2 sont semblables. En déduire qu'il existe un automorphisme $\overrightarrow{f}$ de $\overrightarrow{E}$ tel que :
   $$\overrightarrow{g_1} = \overrightarrow{f}^{-1} \circ \overrightarrow{g_2} \circ \overrightarrow{f}$$
   (b) Etudier le cas où $\overrightarrow{D_1} = \overrightarrow{D_2}$.
   (c) Montrer qu'il existe un automorphisme f de E tel que $g_1 = f^{-1} \circ g_2 \circ f$

Exercice 6

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, et

$$F = \left\{ \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

1. Préciser une base orthonormale de F.
2. Déterminer $F^\perp$, l'orthogonal de F. Préciser une base orthonormale de $F^\perp$.
3. Donner l'expression de $p_F(\overrightarrow{x})$, la projection orthogonale d'un vecteur quelconque $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$ sur F. Préciser les images par p_F des vecteurs de la base définie précédemment.
4. Pour $\overrightarrow{x}$ dans $\mathbb{R}^3$ donné, calculer $d(\overrightarrow{x}, F)$.
5. Ecrire la matrice (relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$) de la symétrie orthogonale s_F par rapport à F. Quelle est, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $F^\perp$?
6. Ecrire la matrice (relativement à la base canonique) de la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et d'axe $F^\perp$.

Exercice 7

Déterminer la matrice de la rotation $\overrightarrow{r}$ de $\mathbb{R}^3$ dans une base orthonormée $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ telle que

$$\overrightarrow{r}(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{k} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{r}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} \text{ avec } \overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donner son angle de rotation.

Exercice 8

Soit $\overrightarrow{E}$ un espace euclidien de dimension 3 et $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe.
Etudier les endomorphismes de $\overrightarrow{E}$ représentés dans la base $\mathcal{B}$ par les matrices suivantes :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad E = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \qquad F = \frac{-1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$