# Révisions pour le Partiel

*Corrigé*

---

## Exercice 1

**Soit $E$ un espace affine.**

1. **Trouver toutes les applications affines $f : E \to E$ qui commutent avec toutes les translations de $E$.**
   Soit $f : E \to E$ une application affine telle que $\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E},\ f \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ f$.
   On a donc :
   $$\forall M \in E, \forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}, \quad f(M + \overrightarrow{u}) = (f \circ t_{\overrightarrow{u}})(M) = (t_{\overrightarrow{u}} \circ f)(M) = f(M) + \overrightarrow{u}$$
   En particulier, on a $\overrightarrow{f} = Id_{\overrightarrow{E}}$, donc $f$ est une translation.
   Réciproquement, toute translation commute avec toute translation de $E$.
2. **On rappelle que pour tout point $A$ de $E$, la symétrie centrale de centre $A$ désigne la symétrie affine par rapport à $\{A\}$ parallèlement à $E$, c'est-à-dire l'application affine $s_A : E \to E$ définie par :**
   $$\forall M \in E,\ \overrightarrow{As_A(M)} = -\overrightarrow{AM}$$
   **Montrer que, si une application affine $f$ de $E$ das $E$ commute avec toutes les symétries centrales de $E$, alors $f = Id_E$**

   On a pour tout point $A \in E$,
   $$f(A) = f(s_A(A)) = (f \circ s_A)(A) = (s_A \circ f)(A) = s_A(f(A))$$
   Comme $A$ est le seul point invariant par $f$, on déduit que $f(A) = A$.
   Finalement $f = Id_E$.

---

## Exercice 2

**Soit $E$ un espace affine de dimension $n \geq 2$. Soient $A, B, C, D$ quatre points non alignés de $E$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :**

**(i)** $(A, B, C, D)$ **est un parallélogramme, c'est-à-dire** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
**(ii)** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
**(iii)** $(AB)$ **est parallèle à** $(DC)$ **et** $(AD)$ **est parallèle à** $(BC)$
**(iv)** $(A, C)$ **et** $(B, D)$ **sont même isobarycentre**

On a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ : autrement dit, on a $\boxed{(i) \Leftrightarrow (ii)}$

De même, on pourrait montrer que $\boxed{(i) \Leftrightarrow (ii')}$ avec : (ii') $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

Remarquons alors que, les points $A, B, C, D$ étant non alignés, si ces trois conditions sont réalisées, ces points sont nécessairement distincts deux à deux et on a alors la propriété (iii). On a donc $\boxed{(i) \Rightarrow (iii)}$

Supposons maintenant remplie la condition (iii). On a alors :
$$A \neq B, \quad C \neq D, \quad A \neq D, \quad B \neq C$$

La famille $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})$ est liée, ainsi que la famille $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC})$. Les points $A,B,C,D$ étant non alignés, la famille $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ est alors libre et les quatre ponts $A,B,C,D$ appartiennent à un sous-espace affine de dimension 2, de direction $Vect(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$.

On en déduit l'existence d'un unique couple $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$$

Or, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ donc, la famille $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC})$ étant liée, il existe un $k\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AD}$. L'unicité de $\lambda$ impose donc $\lambda=1$, et par un raisonnement analogue, on a $\mu=1$.

On a ainsi montré que $\boxed{(iii)\Rightarrow(i)}$

La propriété (iv) est équivalente à $\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, autrement dit la propriété (i).

On a donc $\boxed{(iv)\Leftrightarrow(i)}$

---

## Exercice 3

**Soient $E$ un plan affine de direction $\overrightarrow{E}$ et $A,B,C$ trois points non alignés de $E$.**
**On définit le point $C'$ par la relation : $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}$.**
**Soit $f$ l'application affine de $E$ dans $E$ définie par :**

$$f(A)=A,\quad f(B)=B,\quad f(C)=C'$$

1. **Montrer que $f$ est bijective. Déterminer ses points fixes.**
   On sait que $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}$. On a donc : $\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{BC'}-\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{0}$.
   On en déduit que $C'=bar\begin{pmatrix}A&B&C\\-1&1&1\end{pmatrix}$ et par conséquent, si on note $\mathcal{R}$ le repère affine $(A,B,C)$
   $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$
   $f$ a donc pour partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de matrice dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ : $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$
   $\overrightarrow{f}$ étant bijective, $f$ est également bijective.

   De plus, soit $M\in E$ : $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$.
   Alors $\overrightarrow{Af(M)}=\overrightarrow{f(A)f(M)}=\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM})=x\overrightarrow{AB}+y(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=(x+y)\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$
   On en déduit que $f(M)=M\iff y=0\iff M\in(AB)$
   Les points fixes de $f$ sont donc les points de la droite $(AB)$.

2. **Montrer que pour tout point $M$ de $E$, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe. Déterminer les droites globalement invariantes par $f$.**
   D'après ce qu'on a vu précédemment : si $M$ est défini par $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$, alors :

   $$\overrightarrow{Mf(M)}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{Af(M)}=-x\overrightarrow{AB}-y\overrightarrow{AC}+(x+y)\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=y\overrightarrow{AB}$$

   Ainsi, la droite $(MM')$ est toujours parallèle à la droite $(AB)$.

   Soit $D$ une droite globalement invariante par $f$. $D$ est alors parallèle à $(AB)$. Réciproquement, si $D$ est une droite parallèle à $(AB)$, alors l'image d'un point de la droite est encore sur la droite d'après ce qui précède et $D$ est alors globalement invariante par $f$.
   Les droites invariantes par $f$ sont donc les droites parallèles à la droite $(AB)$.

3. **Soit $\overrightarrow{u}\in\overrightarrow{E}$ et $t_{\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.**

(a) **Montrer que $t_{\overrightarrow{u}} \circ f$ est une application affine.**

Une composée d'applications affines est encore une application affine, de partie linéaire égale à la composée des parties linéaires.

(b) **Comparer les parties linéaires de $t_{\overrightarrow{u}} \circ f$ et de $f$.**

Comme la partie linéaire d'une translation est l'identité, on a $\overrightarrow{t_{\overrightarrow{u}} \circ f} = \overrightarrow{f}$

(c) **Déterminer l'ensemble des points invariants de $t_{\overrightarrow{u}} \circ f$ en fonction de $\overrightarrow{u}$.**

Notons $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$. Soit $M$ tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

Les points invariants sont donc ceux vérifiant $M = f(M) + \overrightarrow{u}$ :

$$\begin{cases} x = x + y + \alpha \\ y = y + \beta \end{cases}$$

Ainsi, si $\beta \neq 0$, il n'y a pas de points invariants, si $\beta = 0$ les points invariants sont les points vérifiant $y = -\alpha$. C'est donc une droite parallèle à $(AB)$ passant par le point $I$ défini par $\overrightarrow{AI} = -\alpha\overrightarrow{AC}$.

4. (a) **Soit $G$ l'isobarycentre du triangle $ABC$. Construire $f(G)$.**

On a $G = bar\begin{pmatrix} A & B & C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a donc :

$$f(G) = \begin{pmatrix} f(A) & f(B) & f(C) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = bar\begin{pmatrix} A & B & C' \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & A & B & C \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & C \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$f(G)$ est donc sur la droite $(BC)$ et sur la droite parallèle $(AB)$ passant par $G$.

(b) **Soit $M$ un point quelconque du plan. Construire $f(M)$.**

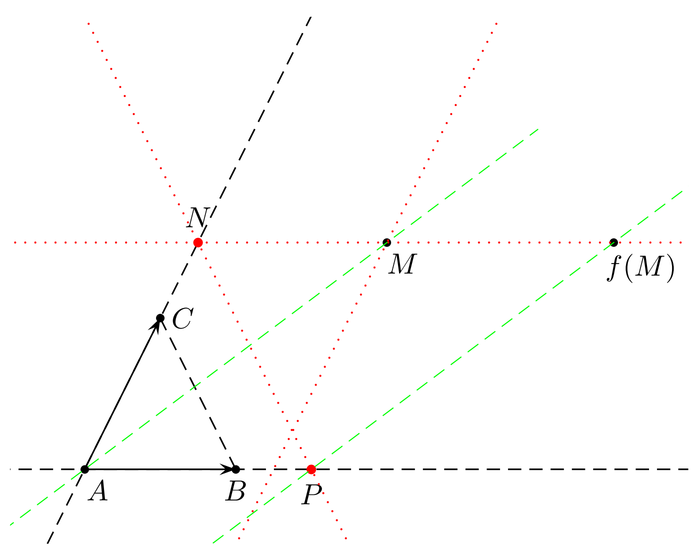
Soit $M$ un point quelconque du plan : $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. On cherche un vecteur $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ tel que $M$ soit un point fixe de $t_{\overrightarrow{u}} \circ f$. D'après la question 3.c., on prend donc $\overrightarrow{u} = -y\overrightarrow{AB}$.

On a donc $f(M) - y\overrightarrow{AB} = M$, autrement dit $\overrightarrow{Mf(M)} = y\overrightarrow{AB}$.

Comment reporter la longueur $y$ sur la droite parallèle à $(AB)$ passant par $M$ (sans règle graduée par exemple) ?

La droite passant par $M$ parallèle à $(AB)$ coupe $(AC)$ en $N$ défini par $\overrightarrow{AN} = y\overrightarrow{AC}$.

Or $y\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{CB} = y\overrightarrow{AB}$. Il suffit donc de tracer la parallèle à $(BC)$ passant par $N$. L'intersection $P$ avec $(AB)$ est alors définie par $\overrightarrow{AP} = y\overrightarrow{AB}$. La parallèle à $(AM)$ passant par $P$ coupe la droite parallèle $(AB)$ passant par $M$ au point $f(M)$.



**Exercice 4**

**Soient $A, B, C, D$ quatre points non coplanaires d'un espace affine de dimension 3. On définit les points $E, F, G$ par :**

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}, \quad G = bar\begin{pmatrix} C & D \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. **Donner des coordonnées barycentriques des points $E, F, G$ dans le repère $(A, B, C, D)$.**

   On a directement :

$$E = bar\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = bar\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = bar\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. **Soient $H, M, N$ trois points de l'espace affine. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées barycentriques dans le repère $(A, B, C, D)$ :**

   **(i) pour qu'un point $M$ appartienne à la droite $(EG)$**

   Soit $M = bar\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$. On a :

$$M \in (EG) \Longleftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ / \ M = bar\begin{pmatrix} E & G \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = bar\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ \alpha & \alpha & \beta & 3\beta \end{pmatrix}$$

   On a donc

$$M \in (EG) \Longleftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 3c = d \end{cases}$$

   **(ii) pour qu'un point $N$ appartienne à la droite $(HF)$, $H$ étant un point de la droite $(AD)$**

   Soit $N = bar\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$. Soit $H \in (AD)$ : $H = bar\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ x & 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix}$ pour un certain $x \in \mathbb{R}$.

   Alors

$$N \in (HF) \Longleftrightarrow \exists \alpha, \beta, x \in \mathbb{R} \ / \ N = bar\begin{pmatrix} H & F \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = bar\begin{pmatrix} A & D & B & C \\ x & \alpha - x & \beta & 2\beta \end{pmatrix}$$

   On a donc

$$N \in (HF) \text{ avec } H \in (AD) \Longleftrightarrow 2b' = c'$$

3. **Montrer qu'il existe un unique point $H$ de $(AD)$ tel que les droites $(EG)$ et $(HF)$ soient concourantes.**

   Les droites $(EG)$ et $(HF)$ se coupent en un point $I$ de coordonnées barycentriques $(a, b, c, d)$ vérifiant les conditions $(i)$ et $(ii)$ précédentes. Ce point $I$ est donc unique et déterminé par :

$$\begin{cases} a = b \\ 2b = c \\ 3c = d \end{cases}$$

   On a donc : $I = bar\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

   Ce point $I$ correspond à un unique point $H \in (AD)$ : $H = bar\begin{pmatrix} A & D \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

---

## Exercice 5

**Soient $E$ un plan affine de direction $\overrightarrow{E}$ et $D$ une droite de $E$.**
**On appelle *transvection affine* de base $D$ toute application affine $g : E \to E$ telle que, tout point de la droite $D$ est invariant par $g$, et pour tout point $M$ de $E$, $\overrightarrow{Mg(M)} \in \overrightarrow{D}$.**

1. **Si $D'$ est une droite de $E$ telle que $\overrightarrow{D'} \neq \overrightarrow{D}$, on note $s_{D'}$ la symétrie affine autour de $D'$ parallèlement à $\overrightarrow{D}$.**

   (a) **Soient deux droites $D_1, D_2$ telles que $D, D_1, D_2$ soient distinctes et concourantes. Montrer que $h = s_{D_2} \circ s_{D_1}$ est une transvection affine de base $D$.**
   Posons $O$ l'intersection des trois droites : on a $h(O) = O$.
   Posons $\overrightarrow{i}$ un vecteur dirigeant $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{j}$ un vecteur dirigeant $\overrightarrow{D_1}$.
   $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est donc une base de $\overrightarrow{E}$.
   On a :

$$mat_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{s_{D_1}}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad mat_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{s_{D_2}}) = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad mat_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{h}) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   On voit bien que $\overrightarrow{h}(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i}$ : comme $h(O) = O$, avec $O \in D$, tout point de la droite $D$ est invariant par $h$. De plus, si $M$ est défini par $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$, alors on a

$$\overrightarrow{Oh(M)} = \overrightarrow{h(O)h(M)} = \overrightarrow{h}(\overrightarrow{OM}) = x\overrightarrow{i} + y(\alpha\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) = (x + \alpha y)\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$$

   Ainsi, on a pour tout point $M$ du plan,

$$\overrightarrow{Mh(M)} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{Oh(M)} = -x\overrightarrow{i} - y\overrightarrow{j} + (x + \alpha y)\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} = \alpha y\overrightarrow{i} \in \overrightarrow{D}$$

   $h$ est finalement bien une transvection affine de base $D$.

   (b) **Soit $g$ une transvection de base $D$. Montrer qu'il existe deux droites $D_1$ et $D_2$ de directions différentes de $\overrightarrow{D}$, telles que $g = s_{D_2} \circ s_{D_1}$.**
   Soit $g$ une transvection de base $D$. On choisit $D_2$ une droite telle que $\overrightarrow{D_2} \neq \overrightarrow{D}$. Les droites $D$ et $D_2$ s'intersectent en un point $O$.
   On choisit une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de $\overrightarrow{E}$ avec $\overrightarrow{i} \in \overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{j} \in \overrightarrow{D_2}$
   Dans cette base, on a :

$$mat_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{s_{D_2}}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad mat_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{g}) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad mat_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{s_{D_2}})mat_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{g}) = \begin{pmatrix} -1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   $\overrightarrow{s_{D_2} \circ g}$ est donc une symétrie vect. autour d'une droite $\overrightarrow{D_1}$ dirigée par $\alpha\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$, parallèlement à $\overrightarrow{D}$.
   On pose $D_1$ la droite de direction $\overrightarrow{D_1}$ passant par $O$, et on a finalement : $g = s_{D_2} \circ s_{D_1}$.

2. **Soit $g$ une application affine. Montrer que $g$ est une transvection affine de base $D$ si et seulement si :**
   **(i)** $\exists I \in D$ **tel que** $g(I) = I$
   **(ii)** $\exists \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{D}$, $\exists \overrightarrow{\varphi}$ **forme linéaire de noyau** $\overrightarrow{D}$ **tels que :**

$$\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}, \quad \overrightarrow{g}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v}$$

   **Lorsque $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, on dit que $\overrightarrow{g}$ est une transvection vectorielle de droite $\overrightarrow{D}$.**
   **Lorsque $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, on a $\overrightarrow{g} = Id_{\overrightarrow{E}}$**

Supposons que $g$ soit une transvection de base $D$.
Le fait de choisir un point quelconque $I$ de $D$ vérifie le point $(i)$.
Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$. Alors $\exists! M \in E$ tel que $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{u}$. Alors :

$$\overrightarrow{g}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{g}(\overrightarrow{IM}) = \overrightarrow{g(I)g(M)} = \overrightarrow{g(I)M} + \overrightarrow{Mg(M)} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{Mg(M)} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{Mg(M)}$$

Comme $g$ est une transvection, si $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{D}$, il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{Mg(M)} = \lambda\overrightarrow{v}$.
On a alors $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$.
Notons $\overrightarrow{\varphi}$ l'application qui à $\overrightarrow{u}$ associe le réel $\lambda$ défini précédemment.
On a $(\overrightarrow{g} - Id_{\overrightarrow{E}})(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{v}$ : $\overrightarrow{\varphi}$ est donc une forme linéaire de noyau $\overrightarrow{D}$, ce qui vérifie le point $(ii)$.

Réciproquement, si $g$ est une application affine vérifiant les point $(i)$ et $(ii)$. Soit $I$ un point fixe de $g$ et $\overrightarrow{D}$ une direction fixe par $\overrightarrow{g}$ (ainsi la droite $D$ passant par $I$ dirigée par $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{D}$ est invariante par $g$).
Si $M$ est un point de $E$, tel que $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{u}$, on a :

$$\overrightarrow{g}(\overrightarrow{u}) = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{g}(\overrightarrow{IM}) = \overrightarrow{g(I)g(M)} = \overrightarrow{g(I)M} + \overrightarrow{Mg(M)} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{Mg(M)} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{Mg(M)} \\ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} \end{array} \right.$$

On a donc $\overrightarrow{Mg(M)} = \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{D}$ et $g$ est une transvection.

3. **On considère une application affine $g$ pour laquelle la propriété (ii) est vérifiée. Montrer à l'aide d'un exemple que $g$ n'est pas nécessairement une transvection affine.**
   Il suffit de prendre $f$ une transvection de base $D$ et on prend $g = t_{\overrightarrow{u}} \circ f$ avec $\overrightarrow{u} \notin \overrightarrow{D}$. Alors $g$ n'a plus de point fixe.

4. **Soient $g_1$,$g_2$ deux transvections affines, différentes de $Id$, de bases respectives $D_1$ et $D_2$. On a alors :**

$$\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}, \quad \overrightarrow{g_i}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{\varphi_i}(\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v_i}, \qquad i = 1, 2$$

   **Vérifier que $\overrightarrow{v_1} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v_2} \neq \overrightarrow{0}$.**
   En effet, on a bien $\overrightarrow{v_1} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v_2} \neq \overrightarrow{0}$ car $g_1$ et $g_2$ sont différentes de $Id$.

   (a) **On suppose $\overrightarrow{D_1} \neq \overrightarrow{D_2}$, $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ est alors une base de $\overrightarrow{E}$. Ecrire les matrices $M_1$ et $M_2$ associées respectivement à $\overrightarrow{g_1}$ et à $\overrightarrow{g_2}$ dans cette base. Montrer que $M_1$ et $M_2$ sont semblables. En déduire qu'il existe un automorphisme $\overrightarrow{f}$ de $\overrightarrow{E}$ tel que $\overrightarrow{g_1} = \overrightarrow{f}^{-1} \circ \overrightarrow{g_2} \circ \overrightarrow{f}$.**
   On a directement :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & \overrightarrow{\varphi_1}(\overrightarrow{v_2}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \overrightarrow{\varphi_2}(\overrightarrow{v_1}) & 1 \end{pmatrix}$$

   De plus, si on pose $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\overrightarrow{\varphi_1}(\overrightarrow{v_2})}{\overrightarrow{\varphi_2}(\overrightarrow{v_1})} & 0 \end{pmatrix}$, alors $P$ est inversible et $M_1 = P^{-1}M_2P$.
   Les matrices $M_1$ et $M_2$ sont donc semblables et en revenant aux applications linéaires associées, il existe un automorphisme $\overrightarrow{f}$ de $\overrightarrow{E}$ tel que $\overrightarrow{g_1} = \overrightarrow{f}^{-1} \circ \overrightarrow{g_2} \circ \overrightarrow{f}$.

   (b) **Etudier le cas où $\overrightarrow{D_1} = \overrightarrow{D_2}$.**
   Si $\overrightarrow{D_1} = \overrightarrow{D_2}$, on choisit $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{\varphi_1} = k\overrightarrow{\varphi_2}$ et on procède de la même façon

   (c) **Montrer qu'il existe un automorphisme $f$ de $E$ tel que $g_1 = f^{-1} \circ g_2 \circ f$**
   La partie linéaire $\overrightarrow{f}$ étant établie, il faut définir l'image d'un point par $f$.
   Si $D_1$ et $D_2$ se coupent en un point $I$, on pose $f(I) = I$.
   Si $D_1$ et $D_2$ sont parallèles, on choisit un point $J$ de $D_1$ et on pose $f(J) = J$.

**Exercice 6**

**On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, et**

$$F = \left\{ \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

1. **Préciser une base orthonormale de $F$.**
   Commençons par déterminer une base (quelconque) de $F$. On a :

   $$F = Vect\,(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) \ \text{ avec } \overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   Comme $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est libre, c'est bien une base de $F$. Appliquons alors le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à cette base pour obtenir une base orthonormale.

   On pose $\overrightarrow{v_1} = \dfrac{\overrightarrow{u_1}}{\|\overrightarrow{u_1}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Puis, on pose $\overrightarrow{v_2'} = \overrightarrow{u_2} - < \overrightarrow{u_2} | \overrightarrow{v_1} > \overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   Enfin, on pose $\overrightarrow{v_2} = \dfrac{\overrightarrow{v_2'}}{\|\overrightarrow{v_2'}\|} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$

   La famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ est alors une b.o.n. de $F$.

2. **Déterminer $F^\perp$, l'orthogonal de $F$. Préciser une base orthonormale de $F^\perp$.**
   Comme $\dim(F) = 2$, on en déduit directement que $\dim(F^\perp) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(F) = 1$.

   Or $F = \left\{ \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} = \left\{ \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3 \ / \ \overrightarrow{x}.\overrightarrow{u} = 0 \text{ avec } \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

   On en déduit que $F^\perp = Vect(\overrightarrow{u})$. Si on préfère une base orthonormale, on prendra :

   $$F = Vect(\overrightarrow{v_3}) \quad \text{avec } \overrightarrow{v_3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. **Donner l'expression de $p_F(\overrightarrow{x})$, la projection orthogonale d'un vecteur quelconque $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$ sur $F$.**
   On connaît l'expression de la projection sur un sev lorsqu'on connaît une b.o.n. de ce sous-espace. On a donc ici :

   $$p_F(\overrightarrow{x}) = < \overrightarrow{x} | \overrightarrow{v_1} > \overrightarrow{v_1} + < \overrightarrow{x} | \overrightarrow{v_2} > \overrightarrow{v_2}$$

   Autrement dit, si $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, on a :

   $$p_F(\overrightarrow{x}) = \frac{x_1 - x_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x_1 + x_2 - 2x_3}{3} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

   **Préciser les images par $p_F$ des vecteurs de la base définie précédemment.**
   On a directement :

   $$p_F(\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{v_1}, \quad p_F(\overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{v_2}, \quad p_F(\overrightarrow{v_3}) = \overrightarrow{0}$$

4. **Pour $\overrightarrow{x}$ dans $\mathbb{R}^3$ donné, calculer $d(\overrightarrow{x}, F)$.**
On a :

$$d(\overrightarrow{x}, F) = \|\overrightarrow{x} - p_F(\overrightarrow{x})\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} \right\| = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

5. **Ecrire la matrice (relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$) de la symétrie orthogonale $s_F$ par rapport à $F$. Quelle est, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $F^\perp$ ?**
On sait que $s_F = 2p_F - Id$. Calculons déjà la matrice de la projection $p_F$ dans la base canonique.
D'après la formule de $p_F(\overrightarrow{x})$ pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$, on en déduit facilement les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. La matrice de la projection $p_F$ est donc :

$$mat_{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})}(p_F) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On en déduit alors que :

$$mat_{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})}(s_F) = 2mat_{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})}(p_F) - I_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On sait que pour tout sous-espace vectoriel $F$, on a $S_{F^\perp} = -s_F$, on a donc :

$$mat_{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})}(s_{F^\perp}) \frac{1}{3} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

6. **Ecrire la matrice (relativement à la base canonique) de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et d'axe $F^\perp$.**

Dans la b.o.n. $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$, la rotation a pour matrice : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En notant $P$ la matrice de passage de la base canonique à la base $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$, on a :

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = {}^tP = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Ainsi, la matrice $R$ de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et d'axe $F^\perp$ dans la base canonique est :

$$R = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 7**

**Déterminer la matrice de la rotation $\overrightarrow{r}$ de $\mathbb{R}^3$ dans une base orthonormée $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ telle que**

$$\overrightarrow{r}(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{k} \qquad \textbf{et} \qquad \overrightarrow{r}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} \textbf{ avec } \overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Donner son angle de rotation.**

Posons $A$ la matrice cherchée. La première colonne est entièrement déterminée puisqu'on connaît l'image de $\overrightarrow{i}$ par la rotation $\overrightarrow{r}$. On a donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x & x' \\ 0 & y & y' \\ 1 & z & z' \end{pmatrix} \qquad \text{avec } x, y, z, x', y', z' \in \mathbb{R}$$

$A$ doit être une matrice de rotation, autrement dit une matrice orthogonale directe. Notons $C_1, C_2, C_3$ les colonnes de la matrice de $A$. Alors $(C_1, C_2, C_3)$ doit être une base orthonormée directe.

On obtient alors les conditions suivantes :

$$\begin{cases} z = 0 \\ z' = 0 \\ xx' + yy' + zz' = 0 \\ 1 = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 \\ xy' - yx' = 1 \end{cases}$$

Les trois premières équations traduisent l'orthogonalité des colonnes, les trois suivantes traduisent la normalité des colonnes, la dernière équation exprime le fait que $\det(A) = 1$. On a déjà : $\boxed{z = z' = 0}$.

La condition $\overrightarrow{r}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ se traduit par :

$$\begin{pmatrix} 0 & x & x' \\ 0 & y & y' \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} -x + x' = 1 \\ -y + y' = -1 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Voici donc toutes les équations dont on dispose :

$$\begin{cases} (1) \quad xx' + yy' = 0 \\ (2) \quad x^2 + y^2 = 1 \\ (3) \quad x'^2 + y'^2 = 1 \\ (4) \quad xy' - yx' = 1 \\ (5) \quad x' - x = 1 \\ (6) \quad y - y' = 1 \end{cases}$$

En remplaçant $x' = 1 + x$ et $y' = y - 1$ dans l'équation (1), on obtient :

$$0 = xx' + yy' = x(1+x) + y(y-1) = x + x^2 + y^2 - y = x - y + 1$$

De même, dans l'équation (4), on obtient :

$$1 = xy' - x'y = x(y-1) - (1+x)y = xy - x - y - xy = -x - y$$

On a donc :

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{x = -1} \\ \boxed{y = 0} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{x' = 0} \\ \boxed{y' = -1} \end{cases}$$

On en déduit donc la matrice de la rotation :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'angle $\theta$ de la rotation $\overrightarrow{r}$ est déterminé par $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
On a :

$$tr(A) = 2\cos(\theta) + 1 \Longrightarrow \cos(\theta) = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \theta = \pm\frac{2\pi}{3}$$

On sait par ailleurs que $\sin(\theta)$ est du signe de $\det(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{r}(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{u})$ où $\overrightarrow{u}$ est le vecteur dirigeant l'axe de $\overrightarrow{r}$ et $\overrightarrow{x}$ est un vecteur quelconque, non inclus dans l'axe de $\overrightarrow{r}$.
Si on prend par exemple, le vecteur $\overrightarrow{i}$ (non fixe, donc non inclus dans l'axe), on a :

$$\det(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{u}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

On a donc $\sin(\theta) > 0$ et ainsi : $\boxed{\theta = \frac{2\pi}{3}}$

---

**Exercice 8**

**Soit $\overrightarrow{E}$ un espace euclidien de dimension 3 et $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe.**
**Etudier les endomorphismes de $\overrightarrow{E}$ représentés dans la base $\mathcal{B}$ par les matrices données.**

1. $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ est bien une matrice orthogonale car $\begin{cases} < C_1|C_2 >=< C_1|C_3 >=< C_2|C_3 >= 0 \\ \|C_1\| = \|C_2\| = \|C_3\| = 1 \end{cases}$

   Cherchons les vecteurs fixes par $A$ : $E_1(A) = \mathrm{Ker}(A - I_3)$

   $$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \Longleftrightarrow AX = X \Longleftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y - z &= 3x \\ 2x + y - 2z &= 3y \\ -x - 2y - 2z &= 3z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = 2x \\ z = -x \end{cases}$$

   Ainsi $E_1(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ : $\dim(E_1(A)) = 1$. $A$ représente donc une rotation $\overrightarrow{r}$ d'axe $E_1(A)$ et d'angle $\theta$.
   $\cos\theta$ est déterminé par la relation $tr(A) = 2\cos\theta + 1$. On a donc :

   $$2\cos\theta + 1 = -1 \Longrightarrow \cos\theta = -1 \Longrightarrow \theta = \pi\,[2\pi]$$

   $\overrightarrow{r}$ est donc le <u>demi-tour autour de l'axe $E_1(A)$</u>.

2. $B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ est bien une matrice orthogonale car $\begin{cases} < C_1|C_2 >=< C_1|C_3 >=< C_2|C_3 >= 0 \\ \|C_1\| = \|C_2\| = \|C_3\| = 1 \end{cases}$

   Cherchons les vecteurs fixes par $B$ : $E_1(B) = \mathrm{Ker}(B - I_3)$

   $$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(B) \Longleftrightarrow BX = X \Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z &= 3x \\ 2x + y - 2z &= 3y \\ 2x - 2y + z &= 3z \end{cases} \Longleftrightarrow x - y - z = 0$$

   Ainsi $E_1(B) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ : $\dim(E_1(B)) = 2$.

   $B$ représente donc la <u>symétrie orthogonale par rapport au plan vectoriel $E_1(B)$</u>.

3. $C=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix}$ est bien une matrice orthogonale car $\begin{cases} <C_1|C_2>=<C_1|C_3>=<C_2|C_3>=0 \\ \|C_1\|=\|C_2\|=\|C_3\|=1 \end{cases}$

Cherchons les vecteurs fixes par $C$ : $E_1(C)=\text{Ker}(C-I_3)$

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(C) \Longleftrightarrow CX=X \Longleftrightarrow \begin{cases} -2x-\sqrt{6}y+\sqrt{6}z & = & 4x \\ \sqrt{6}x+y+3z & = & 4y \\ -\sqrt{6}x+3y+z & = & 4z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=z \\ z=z \end{cases}$$

Ainsi $E_1(C)=Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ : $\dim(E_1(C))=1$. $C$ représente donc une rotation $\overrightarrow{r}$ d'axe $E_1(C)$ et d'angle $\theta$.

$\cos\theta$ est déterminé par la relation $tr(C)=2\cos\theta+1$. On a donc :

$$2\cos\theta+1=0 \Longrightarrow \cos\theta=-\frac{1}{2} \Longrightarrow \theta=\pm\frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$$

De plus, $\sin\theta$ est du signe de $\det(\overrightarrow{x},\overrightarrow{r}(\overrightarrow{x}),\overrightarrow{u})$ où $\overrightarrow{u}$ est le vecteur dirigeant $E_1(C)$ et $\overrightarrow{x}\notin E_1(C)$.

$$\det(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{r}(\overrightarrow{e_1}),\overrightarrow{u})=(*)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 1 \\ 0 & -\sqrt{6} & 1 \end{vmatrix}=2(*)\sqrt{6}>0 \quad \text{avec}(*)>0$$

Ainsi, $\sin(\theta)>0$. Finalement, $\overrightarrow{r}$ est la <u>rotation d'axe $E_1(C)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$</u>

4. $D=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ est bien une matrice orthogonale car $\begin{cases} <C_1|C_2>=<C_1|C_3>=<C_2|C_3>=0 \\ \|C_1\|=\|C_2\|=\|C_3\|=1 \end{cases}$

Cherchons les vecteurs fixes par $D$ : $E_1(D)=\text{Ker}(D-I_3)$

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(D) \Longleftrightarrow DX=X \Longleftrightarrow \begin{cases} -2x+6y-3z & = & 7x \\ 6x+3y+2z & = & 7y \\ -3x+2y+6z & = & 7z \end{cases} \Longleftrightarrow 3x-2y+z=0$$

Ainsi $E_1(D)=Vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$ : $\dim(E_1(D))=2$.

$D$ représente donc la <u>symétrie orthogonale par rapport au plan vectoriel $E_1(D)$</u>.

5. $E=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$ est bien une matrice orthogonale car $\begin{cases} <C_1|C_2>=<C_1|C_3>=<C_2|C_3>=0 \\ \|C_1\|=\|C_2\|=\|C_3\|=1 \end{cases}$

Cherchons les vecteurs fixes par $E$ : $E_1(E)=\text{Ker}(E-I_3)$

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(E) \Longleftrightarrow EX=X \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x+y+\sqrt{6}z & = & -4x \\ x+3y-\sqrt{6}z & = & -4y \\ -\sqrt{6}x+\sqrt{6}y+2z & = & -4z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Ainsi $E_1(E)=\{0\}$ : $\dim(E_1(E))=0$. $E$ représente donc la composée commutative d'une rotation $\overrightarrow{r}$ et d'une symétrie $s$.

Cherchons les vecteurs changés en leur opposé par $E$ : $E_{-1}(E)=\text{Ker}(E+I_3)$

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_{-1}(E)\Longleftrightarrow EX=-X\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}3x+y+\sqrt{6}z&=&4x\\x+3y-\sqrt{6}z&=&4y\\-\sqrt{6}x+\sqrt{6}y+2z&=&4z\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=x\\y=x\\z=0\end{array}\right.$$

$E_{-1}(E)=Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est donc une droite vectorielle : c'est l'axe de $\overrightarrow{r}$. La symétrie $s$ sera la symétrie orthogonale par rapport au plan $(E_{-1}(E))^{\perp}$.
Cherchons à présent l'angle $\theta$ de la rotation $\overrightarrow{r}$ :
$\cos\theta$ est déterminé par la relation $tr(E)=2\cos\theta-1$. On a donc :

$$2\cos\theta-1=-2\Longrightarrow\cos\theta=-\frac{1}{2}\Longrightarrow\theta=\pm\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$$

De plus, $\sin\theta$ est du signe de $\det(\overrightarrow{x},\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}),\overrightarrow{u})$ où $\overrightarrow{u}$ est le vecteur dirigeant l'axe $E_{-1}(E)$ de la rotation $\overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{f}$ est l'endomorphisme représenté par la matrice $E$ et $\overrightarrow{x}\notin E_1(C)$.

$$\det(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e_1}),\overrightarrow{u})=(*)\begin{vmatrix}1&-3&1\\0&-1&1\\0&\sqrt{6}&0\end{vmatrix}=-(*)\sqrt{6}<0\quad\text{avec}(*)>0$$

Ainsi, $\sin(\theta)<0$. Finalement, $E$ représente la composée commutative de la
rotation d'axe $E_{-1}(E)$ et d'angle $\dfrac{-2\pi}{3}$ et de la symétrie orthogonale par rapport au plan $(E_{-1}(E))^{\perp}$

6. $F=\dfrac{-1}{9}\begin{pmatrix}-8&4&1\\4&7&4\\1&4&-8\end{pmatrix}$ est bien une matrice orthogonale car $\left\{\begin{array}{l}<C_1|C_2>=<C_1|C_3>=<C_2|C_3>=0\\\|C_1\|=\|C_2\|=\|C_3\|=1\end{array}\right.$
Cherchons les vecteurs fixes par $F$ : $E_1(F)=\mathrm{Ker}(F-I_3)$

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_1(F)\Longleftrightarrow FX=X\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}-8x+4y+z&=&-9x\\4x+7y+4z&=&-9y\\x+4y-8z&=&-9z\end{array}\right.\Longleftrightarrow x+4y+z=0$$

Ainsi $E_1(F)=Vect\left(\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ : $\dim(E_1(F))=2$.
$F$ représente donc la symétrie orthogonale par rapport au plan vectoriel $E_1(F)$.