Fiche 1 - Groupe opérant sur un ensemble

Définition : On appelle **groupe** un couple $(G, *)$ où G est un ensemble, et $*$ est une loi de composition interne (l.c.i.) sur G :

$$* : \begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (a,b) & \longmapsto & a * b \end{array}$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

1. Associativité : $\forall a, b, c \in G,\ \ (a * b) * c = a * (b * c)$,
2. Existence d'un élément neutre : $\exists e \in G \ / \ \forall x \in G,\ x * e = x = e * x$
3. Symétrie : $\forall x \in G,\ \exists x^{-1} \in G \ / \ x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$

Le groupe est dit **commutatif** ou **abélien** si $\forall a, b \in G,\ a * b = b * a$.

Exercice 1

On note $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. L'ensemble $\mathcal{S}_n$ des bijections $\sigma : [n] \to [n]$ est un groupe pour la composition $\circ$ des applications. $\mathcal{S}_n$ est appelé le **groupe symétrique**, ou **groupe des permutations**.

Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on utilise la notation suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Pour $i \neq j$, on appelle **transposition** la permutation t_{ij} définie par :

$$\begin{cases} t_{ij}(i) = j \\ t_{ij}(j) = i \\ \forall k \in [n] \backslash \{i, j\},\ t_{ij}(k) = k \end{cases}$$

1. Vérifier que $\mathrm{Card}(\mathcal{S}_n) = n!$.
2. Vérifier que la table de composition du groupe $\mathcal{S}_3$ est donnée par :

$\circ$	1	c	c'	t_{12}	t_{13}	t_{23}
1	1	c	c'	t_{12}	t_{13}	t_{23}
c	c	c'	1	t_{13}	t_{23}	t_{12}
c'	c'	1	c	t_{23}	t_{12}	t_{13}
t_{12}	t_{12}	t_{23}	t_{13}	1	c'	c
t_{13}	t_{13}	t_{12}	t_{23}	c	1	c'
t_{23}	t_{23}	t_{13}	t_{12}	c'	c	1

où

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad c' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Observer sur la table de composition que :

(a) $\mathcal{S}_3$ n'est pas abélien.

(b) La partie $\mathcal{A}_3 = \{1, c, c'\}$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}_3$ appelé le **groupe alterné**.

3. Montrer par une récurrence sur l'entier n que le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions *i.e.* que toute bijection de $[n]$ s'écrit comme la composition d'un nombre fini de transpositions t_{ij} , $i \neq j \in [n]$.

4. Pour des entiers $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_k \leq n$ deux à deux distincts, on appelle **k-cycle** de $\mathcal{S}_n$ la permutation

$$(i_1\, i_2 \ldots i_k) = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{k-1} & i_k \\ i_2 & i_3 & \cdots & i_k & i_1 \end{pmatrix}$$

   Combien y a-t-il de 2-cycles (i.e. de transpositions), de k-cycles dans $\mathcal{S}_n$?
   Donner une décomposition d'un k-cycle en transpositions.

Exercice 2

1. Montrer que tout sous-groupe G de $\mathbb{Z}$ est de la forme $n\mathbb{Z}$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$.
   (Utiliser la division euclidienne par le plus petit entier positif de G.)
2. Montrer que les groupes $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité, $n \in \mathbb{N}^*$, sont les seuls sous-groupes finis de $\mathbb{C}^*$.
   (Commencer par montrer que tout sous-groupe fini est sur le cercle unité. On pourra ensuite utiliser le théorème de Lagrange.)

Opération d'un groupe sur un ensemble.

L'idée est de réaliser un groupe non pas comme une entité abstraite mais comme transformations d'un ensemble.
Soit G un groupe de neutre e et X un ensemble. On dit que l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \longmapsto & \varphi_g(x) \end{array}$$

est une **opération à gauche de G sur X** si :

$$\begin{cases} \forall x \in X,\ \varphi_e(x) = x \\ \text{et} \\ \forall g, g' \in G, \forall x \in X, \quad \varphi_{g*g'}(x) = \varphi_g\left(\varphi'_g(x)\right) \end{cases}$$

On notera $\mathcal{S}(X)$ l'ensemble des bijections de X.

φ est une opération si et seulement si l'application $\left| \begin{array}{ccc} G & \to & \mathcal{S}(X) \\ g & \mapsto & \varphi_g \end{array} \right.$ est un morphisme de groupes.

La relation $\sim$ sur X définie par :

$$x \sim x' \iff \exists g \in G \ / \ x' = \varphi_g(x)$$

est une relation d'équivalence dont les classes sont appelées les **orbites** : l'orbite du point $x \in X$ est donc

$$G \cdot x = \{\ g(x)\ ,\ g \in G\}$$

L'ensemble $G_x = \{g \in G \ / \ \varphi_g(x) = x\}$ s'appelle le **stabilisateur** (ou **sous-groupe d'isotropie**) de x.
On notera $X^G = \{x \in X \ / \ \forall g \in G,\ \varphi_g(x) = x\}$ l'ensemble des points fixes.

L'opération est dite **transitive** s'il n'y a qu'une seule orbite. En d'autres termes si tous les points de X sont reliés par une transformation de G, ce qui s'écrit formellement :

$$\forall x, x' \in G,\ \exists g \in G \ / \ x' = \varphi_g(x)$$

L'opération est dite **simple** (ou **libre**) si le stabilisateur de chaque point est trivial *i.e.* si $\forall x \in X,\ G_x = \{e\}$.

Exercice 3 : Exemples d'opérations

1. Le groupe $GL_2(\mathbb{R})$ des matrices inversibles réelles de type 2×2 opère sur $\mathbb{R}^2$ par multiplication matricielle à gauche :
$$\varphi : \begin{array}{ccc} GL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \left(A, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) & \longmapsto & A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$
   (a) Montrer en utilisant un argument géométrique qu'il y a deux orbites : le singleton $\{(0,0)\}$ et le plan épointé $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
   (b) Donner une seconde preuve de ce fait en utilisant un argument plus algébrique.
   (c) Déterminer le stabilisateur de $(1,0)$.
   (d) Qu'en est-il en dimension n ?

2. Le sous-groupe G de $GL_2(\mathbb{R})$ défini par :
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}^{*+} \right\}$$
opère par φ sur $\mathbb{R}^2$.
Déterminer les orbites et les stabilisateurs $G_{(x,y)}$.

3. Mêmes questions pour le sous-groupe :
$$G' = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}^{*+} \right\}$$

4. Mêmes questions pour le groupe des rotations du plan :
$$O_2^+(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$
(Commencer par l'orbite du point $(r,0)$, $r \in \mathbb{R}^+$.)

5. Mêmes questions pour le sous-groupe :
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \cos h\omega & \sin h\omega \\ \sin h\omega & \cos h\omega \end{pmatrix} \right\}$$

6. Soit $V \subset \mathbb{R}^3$ un sous-espace vectoriel (donc en particulier un sous-groupe de $(\mathbb{R}^3, +)$). Confirmer que l'application suivante :
$$\begin{array}{ccc} V \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{x}) & \longmapsto & \overrightarrow{x} + \overrightarrow{v} \end{array}$$
est une opération simple de V (*i.e.* $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$, $V_{\overrightarrow{x}} = \{\overrightarrow{0}\}$. Est-elle transitive ?

Exercice 4 : Opérations et matrices

Soit $GL_2(\mathbb{C}) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices 2×2 inversibles à coefficients complexes.

1. (a) Montrer que l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} GL_2(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ (P, A) & \longmapsto & PAP^{-1} \end{array}$$

est une opération. Montrer qu'elle n'est ni transitive, ni simple.

   (b) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Décrire l'orbite de $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z' \end{pmatrix}$ lorsque $z \neq z'$.

   (c) Une matrice A dont le spectre est $\{z\}$ est-elle nécessairement dans l'orbite de $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$?

2. On considère le groupe $GL_2(\mathbb{C}) \times GL_2(\mathbb{C})$ pour la loi de composition $*$ définie par :

$$(P, Q) * (P', Q') = (PP', QQ')$$

Montrer que l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} (GL_2(\mathbb{C}) \times GL_2(\mathbb{C})) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ ((P, Q), A) & \longmapsto & PAQ^{-1} \end{array}$$

est une opération. Montrer qu'il y a alors 3 orbites distinctes :

$$O\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad , \quad O\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad , \quad O\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

(Penser aux transformations élémentaires sur les lignes et les colonnes de la matrice A.)

Exercice 5

On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique : $< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.
On note $\mathbb{S}_2 = \{\overrightarrow{x},\ < \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x} >= 1\} \subset \mathbb{R}^3$ la sphère unité de centre $(0, 0, 0)$. On considère l'opération :

$$O_2^+(\mathbb{R}) \times \mathbb{S}_2 \longrightarrow \mathbb{S}_2$$

par rotation autour de l'axe $< (0, 0, 1) >$.

1. Ecrire cette action matriciellement.
2. Quelles sont les orbites ?
3. Quels sont les points fixes ?

Exercice 6 : Permutations et symétries

1. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une application linéaire $s \in \mathcal{L}(V)$ est appelée une *symétrie* (ou une *involution*) si $s \circ s = Id_V$.

   (a) Montrer que V est somme directe de deux sous-espaces V^+ et V^- stables pour s.

   (b) Donner un exemple (*i.e.* faire une figure) de symétrie lorsque $V = \mathbb{R}^2$ et $\dim(V^+) = \dim(V^-) = 1$.

2. On considère à présent le triangle équilatéral tracé sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ de sommets $P = \{x_1 = (1, 0), x_2, x_3\}$. On se propose de déterminer le sous-groupe G des bijections linéaires du plan qui stabilisent l'ensemble des sommets P.

   (a) Donner six bijections linéaires f telles que $f(P) = P$ et écrire leurs matrices dans la base canonique.

(b) Soient f, f' deux bijections linéaires de $\mathbb{R}^2$. Montrer que si $f_{|P} = f'_{|P}$, alors $f = f'$.

(c) Conclure que le groupe G est isomorphe au groupe des permutations $\mathcal{S}_3$.

Exercice 7 : Un autre exemple d'opération de groupe

Soit $\mathcal{S}_3$ le groupe des permutations de 3 élémentes. On considère l'appliction :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\sigma, (x_1, x_2, x_3)) & \longmapsto & (x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, x_{\sigma^{-1}(3)}) \end{array}$$

1. Montrer que φ est une opération fidèle. Peut-elle être transitive ?

   (Une action est dite fidèle si l'application $\begin{array}{ccc} G & \to & \mathcal{S}(X) \\ g & \mapsto & \varphi_g \end{array}$ *est injective.)*
2. Donner l'ensemble V des points fixes de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer le groupe d'isotropie des points de $\mathbb{R}^3$ et le cardinal des orbites.
4. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Vérifier que $R = \{e_i - e_j, 1 \leq i \neq j \leq 3\}$ est globalement $\mathcal{S}_3$-invariant et que $\mathcal{S}_3$ opère transitivement sur R.
5. Soit W l'hyperplan d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$ et déduire que V et W sont les seuls sous-espaces propres $\mathcal{S}_3$-invariants de $\mathbb{R}^3$.

   (On pourra montrer que tout sous-espace invariant U non inclus dans V contient nécessairement R.)