Fiche 2 - Espaces affines, applications affines

Exercice 1

1. (a) Rappeler la définition d'un espace affine $(X, \overrightarrow{E})$ en termes d'opération de groupe.
   (b) Si $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, donner la structure affine de $\mathbb{K}^n$ explicitement.
   (c) Montrer que si $\overrightarrow{F} \subset \mathbb{K}^n$ est un sous-espace, alors pour tout $\overrightarrow{r} = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{K}^n$, le sous-ensemble $\overrightarrow{r} + \overrightarrow{F} = \{\overrightarrow{r} + \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}\}$ est un espace affine.

2. Soient deux espaces vectoriels $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{F}$, $f : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{F}$ une application linéaire et $\overrightarrow{b} \in \overrightarrow{F}$. Montrer que l'ensemble des solutions $\overrightarrow{x}$ de l'équation linéaire
$$f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b}$$
(s'il n'est pas vide) est un espace affine dont on déterminera la direction.

3. Soient $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. L'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ qui sont solutions de l'équation différentielle :
$$a_n f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \ldots + a_0 f = \varphi$$
est-il un espace affine ? Dans l'affirmative, quelle est sa dimension lorsque $n = 2$?

4. Montrer que l'ensemble A des matrices 3×3 de la forme :
$$\begin{pmatrix} 1+a-b & a-b & 0 \\ 0 & 2 & 2a-b \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
pour $a, b \in \mathbb{R}$, est un espace affine.
(Indication : c'est un sous-espace affine de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).

5. Soient $(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$ et $b \in \mathbb{R}$. L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels vérifiant
$$u_{n+k} + a_{k-1}u_{n+k-1} + \ldots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n = b$$
est-il un espace affine ?

6. Même question pour l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+1) = f(x) + 1$$

Exercice 2

On considère dans l'espace $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z), x, y, z \in \mathbb{R}\}$, les plans P_0 et P_1 d'équations respectives $z = 0$ et $z = 1$. On désigne par $\mathbb{P}^*$ l'ensemble des droites vectorielles supplémentaires de P_0 dans $\mathbb{R}^3$.

1. Faire une figure
2. Donner une bijection de $\mathbb{P}^*$ sur P_1. En déduire, en revenant à la définition en terme de translations, que $\mathbb{P}^*$ est un espace affine de direction P_0.
3. En quoi $\mathbb{P}^*$ diffère-t-il de la sphère unité $\mathbb{S}_2$ de $\mathbb{R}^3$?
   (Penser à la projection stéréographique)

Exercice 3

1. Soient E et F deux espaces affines de directions respectives $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{F}$. Rappeler la définition d'une application affine $f : E \to F$.
2. Soient $f, f' : E \to F$ deux applications affines.
   (a) Montrer que $f \circ f'$ est affine.
   (b) Montrer que f est bijective si et seulement si $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}$ est bijective et dans ce cas, montrer que f^{-1} est affine.
3. Soit $f : E \to E$ une bijection affine et $O \in E$. Montrer qu'il existe un unique couple (g, τ) d'applications affines de X telles que :
   - $g(O) = O$
   - τ est une translation
   - $f = g \circ \tau$

   Montrer de plus que $g \circ \tau = \tau \circ g$ si et seulement si $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u}$ est le vecteur de la translation τ.

Exercice 4

Soit X un espace affine (réel) de direction $\overrightarrow{E}$, $f : X \to X$ une application affine et :

$$X_f = \{x \in X \ / \ f(x) = x\}$$

l'ensemble des points fixes de f.

1. Montrer que $X_f \subset X$ est soit vide, soit un sous-espace affine de X dont on déterminera la direction.
2. Soit D une droite affine. Montrer que si $f : D \to D$ est affine et admet deux points fixes, alors f est l'application identité.
3. Soit P un plan affine et $D, D' \subset P$ deux droites affines distinctes, sécantes en $O \in P$ et de direction respectives $Vect(\overrightarrow{u})$ et $Vect(\overrightarrow{v})$. Au point $M = O + \overrightarrow{OM} = O + x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$, on associe $p(M)$ défini par $\overrightarrow{Op(M)} = x\overrightarrow{u}$. L'application p est la projection sur D parallèlement à D'.
   (a) Faire un dessin de la situation.
   (b) Montrer que p est une application affine.
   (c) Déterminer l'ensemble des points fixes de p.
   (d) Une application affine $f : P \to P$ admettant deux points fixes est-elle l'identité ?
4. Soient A, B, C trois points non alignés du plan P. On note :
   - h_1 la projection sur la droite (BC) parallèlement à la droite (CA).

– h_2 la projection sur la droite (CA) parallèlement à la droite (AB).
– h_3 la projection sur la droite (AB) parallèlement à la droite (BC).

On pose $h = h_3 \circ h_2 \circ h_1$ et $f = h \circ h$.

(a) Faire une figure

(b) Montrer que la restriction de f à la droite (AB) est l'identité. Qu'est l'application $f : P \to P$?

Exercice 5 : Symétries affines.

1. Une application affine $f : X \to X$ telle que $f \circ f = Id$ est appelée une symétrie de X. On aimerait obtenir une version affine de l'exercice 6 de la Fiche 1.
   (a) Soit M un point de X. Montrer que le point milieu du segment $[M, f(M)]$ défini par :
   $$[M, f(M)] = \{M + t\overrightarrow{Mf(M)},\ t \in [0, 1]\}$$
   est un point fixe de f.
   (b) Donner l'ensemble des points fixes de f.
   (c) Donner deux sous-espaces $\overrightarrow{f}$ stables V^+ et V^- tels que $\overrightarrow{X} = V^+ \oplus V^-$.
   (d) Donner $f(M)$ pour tout $M \in X$.
2. Esquisser les symétries de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ en fonction de la dimension du sous-espace de ses points fixes.

Exercice 6 : Symétries (suite)

Soient $P_1, \ldots, P_n$, n points de l'espace affine X. Le but de cet exercice est de répondre au problème $(*)$ suivant :

Peut-on trouver n points $M_1, \ldots, M_n$ de X tels que pour tout $i \leq n-1$, P_i soit le point milieu du segment $[M_i, M_{i+1}]$ et P_n soit le point milieu du segment $[M_n, M_1]$?

On dit que f est une symétrie de centre P si P est l'unique point fixe de f. Soit f_i la symétrie de centre P_i.

1. Montrer que pour tout $i \geq 2$, $M_i = f_{i-1} \circ f_{i-2} \circ \ldots \circ f_1(M_1)$.
2. En déduire que le problème $(*)$ admet une solution si et seulement si $f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1$ admet un point fixe.
3. Montrer que si n est impair, il y a une solution unique.
4. Si n est pair, donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe au moins une solution. Est-elle unique ?
5. Illustration dans le plan $\mathbb{R}^2$: faire la construction explicite pour $P_1 = (-1, 1)$, $P_2 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $P_3 = (1, 1)$, $P_4 = (1, -1)$, $P_5 = (-1, -1)$ ainsi que pour l'hexagone régulier.
6. Déduire qu'étant donnés trois points P,Q,R, il existe un unique triangle dont le milieu des côtés sont ces points.
7. Montrer que pour que quatre points soient les milieux des côtés d'un quadrilatère, il faut et il suffit qu'ils soient les sommets d'un parallélogramme.

Exercice 7

Soit X un espace affine réel de direction $\overrightarrow{E}$, de dimension n.

1. Décrire l'ensemble des applications affines de X qui transforment toute droite en une droite parallèle.
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{H}$ des bijections affines f de X pour lesquelles $\overrightarrow{f} = \rho Id_{\overrightarrow{E}}$, $\rho \in \mathbb{R}^*$, est un sous-groupe du groupe affine $GA(X)$. Ce sous-groupe est appelé le **groupe des homothéties-translations** de X.
3. Décrire $GA(X)$ lorsque $n = 1$.
4. Montrer que $h \in \mathcal{H} \backslash \{Id_X\}$ admet un point fixe I si et seulement si $\rho \neq 1$. Montrer que I est alors l'unique point fixe de h. On dit que ρ est le **rapport** et I le **centre** de l'homothétie h.
5. On dit que deux applications $f, f' : X \to X$ commutent si $\forall x \in X,\ \ f(f'(x)) = f'(f(x))$. Deux éléments $h, h' \in \mathcal{H} \backslash \{Id_X\}$ commutent-ils ?
6. Montrer que si les points A, B, C sont alignés, alors il existe $h \in \mathcal{H}$ telle que $h(A) = A$ et $h(B) = C$. h est-elle unique ?
7. Utiliser les homothéties-translations pour démontrer le **Théorème de Désargues** :
   Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles sans sommet commun et à côtés respectivement parallèles. Alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles.

Exercice 8 (Partiel Avril 2006)

Soient E un plan affine de direction $\overrightarrow{E}$, muni d'un produit scalaire $< .|. >$ et h, h' deux homothéties de E de rapports respectifs $\rho \neq 1$ et $\rho' \neq 1$ et de centres I, I' avec $I \neq I'$.

1. (a) Montrer que $\forall M \in E \backslash \{I\}$, I appartient à la droite $(Mh(M))$.
   (b) On suppose $\rho\rho' \neq 1$. Montrer que le centre I'' de l'homothétie $h \circ h'$ appartient à la droite (II').
   (On ne demande pas d'expliciter I'')
2. (a) Soient $\mathcal{C} = \{M \in E \ / \ < \overrightarrow{\Omega M} | \overrightarrow{\Omega M} >= R^2\}$ le cercle de centre Ω et de rayon R et h une homothétie de E (de centre I et de rapport ρ). Montrer que $h(\mathcal{C})$ est un cercle dont on déterminera le cercle et le rayon.
   (b) Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de E de centres Ω et Ω' et de rayons R et R' avec $R \neq R'$. Montrer qu'il y a exactement deux homothéties $h^{\pm}$ (h^+ de rapport positif et h^- de rapport négatif) telles que $h^{\pm}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$.
   (c) En considérant les images $h^{\pm}(D)$ de la droite D de la figure 1, donner une construction géométrique simple des centres $I^{\pm}$ des homothéties $h^{\pm}$
3. On considère à présent trois cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ de E de centres et de rayons respectifs Ω_1, Ω_2, Ω_3 ; R_1, R_2, R_3 (centres et rayons deux à deux distincts). Soient $h_i^{\pm}$, $1 \leq i \leq 3$, les homothéties telles que
   $$h_3^{\pm}(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2, \quad h_1^{\pm}(\mathcal{C}_2) = \mathcal{C}_3, \quad h_2^{\pm}(\mathcal{C}_3) = \mathcal{C}_1$$
   On notera $I_i^{\pm}$ les centres de $h_i^{\pm}$, $1 \leq i \leq 3$
   (a) Représenter les six centres d'homothéties $I_i^{\pm}$ sur la figure en bas de page.
   (b) Déterminer $h_2^+ \circ h_1^- \circ h_3^-$.
   (c) En déduire que les points I_1^-, I_2^+, I_3^- sont alignés.
   (d) En procédant par analogie, montrer que les points I_1^+, I_2^+, I_3^+ sont alignés.

Figure 1

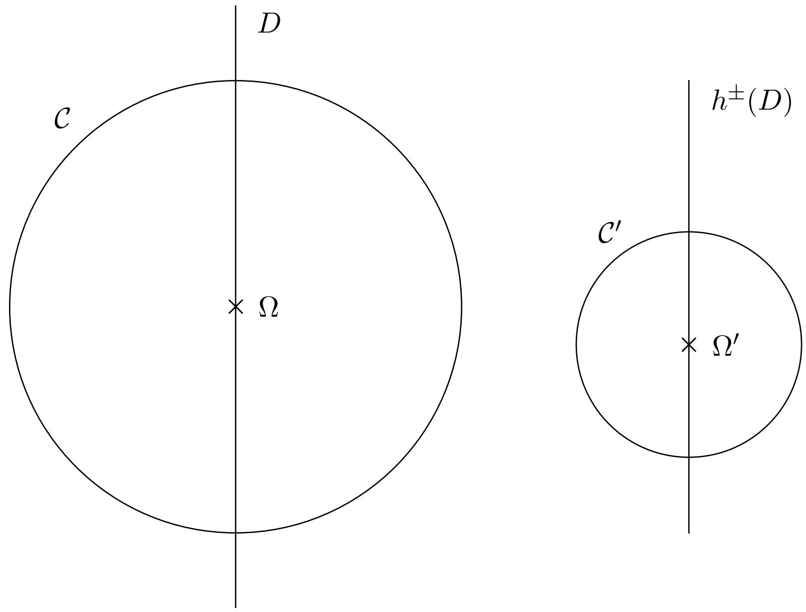
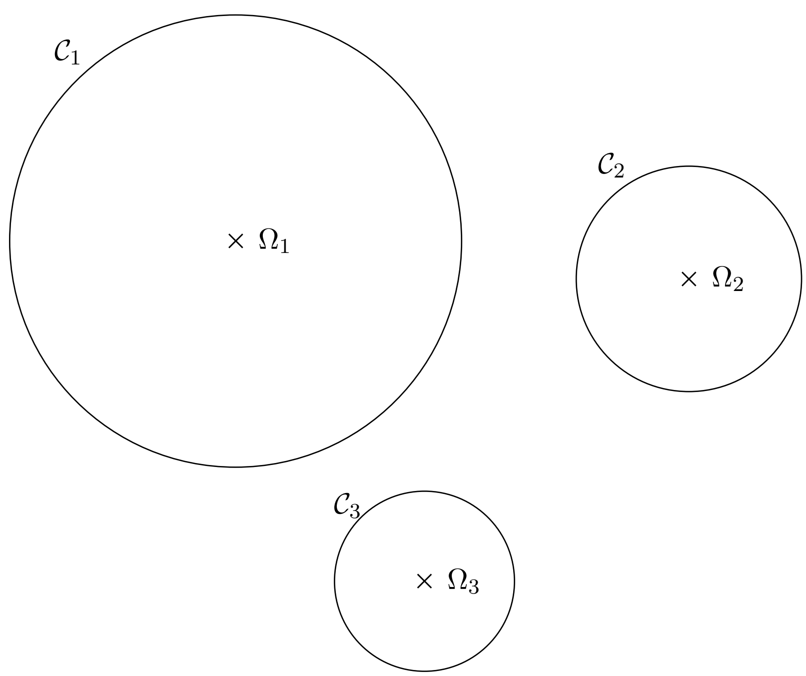


Figure 2



Exercice 9 (Partiel Avril 2004)

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine réel. On se donne quatre droites de $\mathcal{P}$ telles que deux quelconques d'entre elles ne soient pas parallèles et trois quelconques d'entre elles ne soient pas concourantes. Soit (A, B, C, D, E, F) l'ensemble de leurs six points d'intersection avec : A, B, C alignés, de même que C, D, E ; E, F, B ; A, F, D.

1. Faire une figure.

   Soit I (resp. J, resp. K) le milieu de $[AE]$ (resp. $[BD]$, resp. $[CF]$). Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2, on notera alors $\beta = h(J)$, et $\alpha = h(K)$. Soient h_1 l'homothétie de centre E telle que $h_1(F) = B$ et h_2 l'homothétie de centre E telle que $h_2(C) = D$.

2. Montrer que $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$
3. (a) Montrer que les droites (αC) et $AF)$ sont parallèles ainsi que les droites (βB) et (AD). En déduire que (βB)et (αC) sont parallèles.
   (b) Montrer que $h_1(D)$ est sur la droite (βB).
   (c) En déduire que l'image par $h_1 \circ h_2$ de la droite (αC) est la droite (βB).
4. En faisant un travail analogue à celui décrit dans la question précédente, montrer que l'image par $h_2 \circ h_1$ de la droite (αF) est la droite (βD).
5. En déduire que $h_1 \circ h_2(\alpha) = h_2 \circ h_1(\alpha) = \beta$.
6. Montrer que E, β, α sont alignés. En déduire que I,J,K sont alignés.