Fiche 3 - Barycentres, convexité

Définition :
Soit V un espace vectoriel. Si $F \subset V$ est une partie de V, le sous-espace $< F >$ **engendré par** F est défini comme le plus petit (pour l'inclusion) sous-espace vectoriel de V qui contient F. Le sous-espace $< F >$ coincide avec l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de F.

Soit E un espace affine. Si $X \subset E$ est une partie de l'espace affine E le **sous-espace affine engendré par** X que l'on notera aussi $< X >$, est le plus petit (pour l'inclusion) sous-espace affine de E contenant X.

Exercice 1 : Familles affinement libres

Soit E un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$ et $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, \ldots, P_k\} \subset E$.

1. Déterminer $< P_0 >$, $< P_0, P_1 >$, $< \mathcal{P} >$.
2. On dit que $\mathcal{P}$ est **affinement libre** si les vecteurs $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_k}$, forment une famille libre de $\overrightarrow{E}$.
   Montrer alors que pour tout $i_0 \in \{0, \ldots, k\}$, la famille $(\overrightarrow{P_{i_0}P_j})_{j \neq i_0}$ est libre dans $\overrightarrow{E}$.
3. On suppose que $\mathcal{P}$ est affinement libre. Soit F un second espace affine et $\mathcal{P}' = \{P'_0, P'_1, \ldots, P'_k\} \subset F$.
   (a) Montrer qu'il existe une application affine $f : E \to F$ vérifiant
   $$\forall i = 0..k,\ f(P_i) = P'_i$$
   (b) Montrer que cette application est unique si et seulement si $m = n$.
   (c) Montrer que $f\left(< P_0, P_1, \ldots, P_k >\right) =< P'_0, P'_1, \ldots, P'_k >$.
4. **Illustration :** Déterminer une application affine $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que :
   $$f(0,0) = (3,3) \quad , \quad f(1,0) = (1,-1) \quad , \quad f(0,1) = (-1,-1)$$
5. **Cas général :** Soient $A \subset E$ et $B \subset F$ deux sous-espaces affines. Donner une procédure pour construire une application affine $f : E \to F$ telle que $f(A) \subset B$.

Définition :
Soit E un espace affine réel. Soit $P = (P_0, P_1, \ldots, P_k) \in E^{k+1}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_k$, $k+1$ nombres réels tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_k \neq 0$.

On appelle **barycentre** G des points pondérés $(P_i, a_i)_{i=0..k}$ l'unique point de E tel que :
$$\sum_{i=0}^{k} a_i \overrightarrow{GP_i} = \overrightarrow{0}$$

Si M est un point arbitraire de E, on a :
$$G = M + \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{a_i}{\sum_{i=0}^{k} a_i} \right) \overrightarrow{MP_i}$$

Exercice 2 : Coordonnées barycentriques

1. Soit $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ une base affine de E. Montrer que l'application :
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} & \rightarrow & E \\ (a_0, \ldots, a_n) & \mapsto & Bar\big((P_i, a_i)_{i=0..n}\big) \end{array}$$
est surjective.
Si $M = f(a_0, \ldots, a_n)$, on dit que $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ sont les coordonnées barycentriques du point M dans la base affine $\mathcal{B}$.
2. Soit H l'hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}$ d'équation $a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 1$. Montrer que la restriction de f à H est un isomorphisme d'espaces affines.

Exercice 3

Soit $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ une base affine de l'espace affine réel E.
Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ vérifiant $\forall i = 0..n,\ a_i > 0$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i = 1$.
On considère les barycentres $G = Bar\big((P_i, a_i)_{i=0..n}\big)$ et $G_j = Bar\big((P_i, a_i)_{i \neq j}\big)$

1. Faire un dessin de la situation pour $n = 2$ et $n = 3$.
2. Montrer que pour tous $i \neq j$, $< G_i, P_i > \cap < G_j, P_j > = < G >$.

Exercice 4

1. Soient P et Q deux points de l'espace affine E. A un point M de E, on associe l'isobarycentre
$$f(M) = Bar\big((P, 1), (Q, 1), (M, 1)\big)$$
Montrer que l'application $f : E \rightarrow E$ ainsi définie est affine.
2. Généraliser au cas de k points $P_1, P_2, \ldots, P_k$ de E.

Exercice 5

Soient $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, \ldots, P_k\} \subset E$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$. Soit $f : E \rightarrow E$ une application affine.

1. Montrer que $f\left(Bar\big((P_i, a_i)_{i=0..k}\big)\right) = Bar\big((f(P_i), a_i)_{i=0..k}\big)$
2. Montrer que si f est injective et si $\forall i = 0..k, f(P_i) \in \mathcal{P}$, alors f admet au moins un point fixe.
3. On suppose qu'il existe $n \geq 1$ tel que $\forall M \in E, f^n(M) = M$
   (a) Montrer que f est une bijection affine.
   (b) Montrer que f admet un point fixe.
   (c) Construire explicitement une application affine $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vérifiant $f^3 = Id_E$.

Exercice 6

Rappel : Soit V un espace vectoriel. Si $F, F' \subset V$ sont deux sous-espaces vectoriels de V, alors la réunion $F \subset F'$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si $F \subset F'$ ou $F' \subset F$. En général $F \subset F'$ n'est donc pas un sous-espace vectoriel de V.
Le plus petit sous-espace vectoriel de V contenant la réunion $F \subset F'$ est la somme de F et F' :
$$< F \cup F' > = F + F'$$
Le but de cet exercice est de déterminer l'analogue de cette construction en géométrie affine.

Soient A, A' deux sous-espaces affines de l'espace affine réel $(E, \overrightarrow{E})$ de directions $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{F'}$.

1. En distinguant les situations $A \cap A' \neq \emptyset$ et $A \cap A' = \emptyset$, déterminer $< A \cup A' >$ et sa dimension.
   (Rappel : $A \cap A' \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists M \in A, \exists M' \in A' \;/\; \overrightarrow{MM'} \in \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F'}$ *)*
2. Montrer que lorsque $A \cap A' \neq \emptyset$, le sous-espace $< A \cup A' >$ coincide avec la réunion des droites $< M, M' >$, où $M \in A$ et $M' \in A'$.
3. Donner un exemple dans $\mathbb{R}^3$ de sous-espaces affines A et A' tels que $A \cap A' = \emptyset$ et pour lesquels $< A \cup A' >$ est distinct de la réunion de droites de la question 2.

Exercice 7

1. Soit A un sous-espace affine de $(E, \overrightarrow{E})$ et $M \in E \backslash A$. Montrer qu'il existe un et un seul sous-espace affine A' parallèle à A contenant M.
2. On suppose $\dim(E) \geq 2$. Soient H, H' deux hyperplans distincts de E.
   (a) Montrer que $H \cap H' = \emptyset$ si et seulement si H et H' sont parallèles.
   (b) Montrer que si $H \cap H' \neq \emptyset$, alors $\dim(H \cap H') = \dim E - 2$.
3. Soient A et A' deux sous-espaces affines disjoints de direction $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{F'}$. Montrer qu'il existe deux hyperplans parallèles H, H' distincts tels que $A \subset H$ et $A' \subset H'$.

Définition :
Soit E un espace affine. Une partie $C \subset E$ est dite **convexe** si pour tous points M, P de C, le segment $[M, P]$ défini par :

$$[M, P] = \left\{ Bar \begin{pmatrix} p & q \\ 1-t & 1+t \end{pmatrix}, \; t \in [0,1] \right\}$$

est continue dans C.
Remarque :on peut définir de manière équivalente le segment $[M, P]$ comme l'ensemble des barycentres des points pondérés $(M, a), (P, b)$ avec $a, b \geq 0$ tels que $a + b = 1$.

Si $P_1, \ldots, P_k$ désignent des points de E, on appelle **enveloppe convexe** de ces points, notée $Conv(P_1, \ldots, P_k)$ l'intersection de toutes les parties convexes contenant $P_1, \ldots, P_k$.

Exercice 8

1. Intuitivement, quelle est l'enveloppe convexe de trois points non alignés dans $\mathbb{R}^2$?, de quatre points non coplanaires dans $\mathbb{R}^3$? D'une étoile dans le plan ?
2. Soient $P_1, \ldots, P_k$ des points de E. On définit

$$[P_1, \ldots, P_k] = \left\{ Bar \begin{pmatrix} P_1 & \cdots & P_k \\ a_1 & \cdots & a_k \end{pmatrix}, \; a_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} a_i = 1 \right\}$$

   l'ensemble des barycentres à poids positifs des points $(P_i)_{i=1..k}$.
   En procédant par récurrence sur le nombre de points k, montrer que

$$Conv(P_1, \ldots, P_k) = [P_1, \ldots, P_k]$$

3. Vérifier que l'image par une application affine $f : E \to E$ de l'enveloppe convexe de $(P_1, \ldots, P_k)$ est l'enveloppe convexe de $(f(P_1), \ldots, f(P_k))$.

4. Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ le cube dont les sommets de la face inférieure sont en $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (1,1,0)$. Soit T le tétraèdre de sommets $(0,0,0), (1,1,0), (0,0,1), (0,1,1)$ et T' le tétraèdre dont les sommets coincident avec les quatre autres sommets de $\mathcal{C}$.
   Donner une application affine f telle que $f(T) = T'$.

Exercice 9 : Théorème de Gauss-Lucas

Soient k nombres complexes $z_1, \ldots, z_k$ que l'on confondra avec leur image dans le plan complexe. En considérant $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, on peut donc considérer l'enveloppe convexe $[z_1, \ldots, z_k]$.

1. Posons le polynôme P par :

$$P(X) = (X - z_1)^{n_1}(X - z_2)^{n_2} \ldots (X - z_k)^{n_k} \in \mathbb{C}[X], \; n_i \in \mathbb{N}^*$$

   En déterminant la fraction rationnelle $\dfrac{P'(X)}{P(X)}$, montrer que les racines de P' distinctes de $z_1, \ldots, z_k$ appartiennent à l'intérieur de $[z_1, \ldots, z_k]$ (les points intérieurs sont les barycentres à coefficients strictement positifs).

2. Si $P(X) = (X - a_1) \ldots (X - a_k)$ et $P'(X) = n(X - b_1) \ldots (X - b_{n-1})$, montrer que l'isobarycentre des racines de P coincide avec l'isobarycentre des racines de P'.

Exercice 10 : Coordonnées barycentriques dans un triangle

Soit ABC un triangle non aplati du plan $\mathbb{R}^2$ que l'on supposera muni de la distance euclidienne usuelle. On notera les longueurs des côtés $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. On notera les angles aux sommets $\widehat{A}$,$\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

1. Montrer que les médianes du triangle ABC sont concourantes au point

$$G = bar \begin{pmatrix} A & B & C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Montrer que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes au point

$$H = bar \begin{pmatrix} A & B & C \\ \tan \widehat{A} & \tan \widehat{B} & \tan \widehat{C} \end{pmatrix}$$

3. Montrer que les médiatrices du triangle ABC sont concourantes au point

$$O = bar \begin{pmatrix} A & B & C \\ \tan \widehat{B} + \tan \widehat{C} & \tan \widehat{A} + \tan \widehat{C} & \tan \widehat{A} + \tan \widehat{B} \end{pmatrix}$$

4. Montrer que les bissectrices du triangle ABC sont concourantes au point

$$I = bar \begin{pmatrix} A & B & C \\ a & b & c \end{pmatrix}$$