Université Claude Bernard Lyon 1 2008-2009
L3 Géométrie élémentaire

Fiche 4 - Groupe orthogonal d'un espace euclidien

Exercice 1

Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la forme bilinéaire symétrique :

$$\varphi\big((x,t),(x',t')\big) = xx' - tt'$$

1. Déterminer le groupe $O_{1,1}$ des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui préservent φ.
2. Soit $O_{1,1}^{+}$ le sous-groupe des matrices de $O_{1,1}$ de déterminant 1. Montrer qu'il existe une bijection de $O_{1,1}^{+}$ sur la réunion des branches de l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$ du plan $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

Soit $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel euclidien et F, G deux sous-espaces vectoriels orthogonaux de $\overrightarrow{E}$.

1. Montrer que la composée des symétries orthogonales par rapport à F et G commutent et que c'est la symétrie par rapport au sous-espace $(F \oplus G)^{\perp}$.
2. On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Soit s_x la symétrie orthogonale par rapport à l'axe $Vect(\overrightarrow{e_1})$ et s_y la symétrie orthogonale par rapport à l'axe $Vect(\overrightarrow{e_2})$. Donner la table de composition du sous-groupe G de $O(\mathbb{R}^3)$ engendré par s_x et s_y.

Exercice 3 : Générateurs de $O(n)$

1. Confirmer que les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

appartiennent à $O(2)$ et en déterminer une décomposition en produit de réflexions.

2. Même question pour la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition :
Soit G un groupe. Pour tous $x, y \in G$, on définit l'élément

$$[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$$

appelé le **commutateur** de x et de y.

Clairement, l'inverse d'un commutateur reste un commutateur. On notera $[G,G]$ le sous-groupe de G, appelé **groupe dérivé de** G, dont les éléments sont les produits d'un nombre fini de commutateurs.

Exercice 4 : Symétries et commutateur de $O(\overrightarrow{E})$

1. Soit $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel euclidien de dimension n et A, B deux sous-espaces vectoriels de $\overrightarrow{E}$ de même dimension $m \leq n$.
   Montrer qu'il existe une isométrie $f \in O^+(\overrightarrow{E})$ telle que $f(A) = B$
   (Indication : utiliser des bases adaptées aux décompositions $\overrightarrow{E} = A \oplus A^\perp = B \oplus B^\perp$)
2. Montrer que la symétrie orthogonale s_A par rapport à A satisfait :
$$\forall g \in O(\overrightarrow{E}),\ g \circ s_A \circ g^{-1} = s_{g(A)}$$
3. Soient H et H' deux hyperplans vectoriels de $\overrightarrow{E}$ et s_H, $s_{H'}$ les réflexions correspondantes. Utiliser les questions précédentes pour montrer que $s_H \circ s_{H'} \in [O(\overrightarrow{E}), O(\overrightarrow{E})]$. Conclure à l'aide du théorème d'engendrement du cours que $O^+(\overrightarrow{E}) = [O(\overrightarrow{E}), O(\overrightarrow{E})]$

Exercice 5 (Examen Mai 2005)

Soit $(G, *)$ un groupe. On appelle **centre de** G l'ensemble $Z(G)$ défini par :

$$Z(G) = \{z \in G \ / \ \forall g \in G, z * g = g * z\}$$

Soit $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 2$ et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base orthonormée de $\overrightarrow{E}$

1. Soit f un endomorphisme de $\overrightarrow{E}$ qui commute avec toutes les symétries orthogonales $s \in O(\overrightarrow{E})$.
   (a) Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale.
   (On pourra faire commuter f avec des réflexions judicieusement choisies)
   (b) Montrer que f est une homothétie vectorielle.
   (c) Déterminer le centre du groupe orthogonal $O(\overrightarrow{E})$.
2. Déterminer le centre de $O^+(\overrightarrow{E})$ en dimension 2 et 3.

> **Rappel :**
> Soit $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel euclidien.
> Si F est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$ et si $p_F : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}$ est le projecteur orthogonal sur F (*i.e.* relativement à la décomposition $\overrightarrow{E} = F \oplus F^\perp$), alors la distance d'un vecteur $x \in \overrightarrow{E}$ au sous-espace F est par définition :
> $$d(\overrightarrow{x}, F) = \|\overrightarrow{x} - p_F(\overrightarrow{x})\|$$

Exercice 6 : Matrices de Gram

Pour $X = (\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n}) \in \overrightarrow{E}^n$, on appelle **matrice de Gram** la matrice $G(X)$ définie par :

$$G(X)_{i,j} = < \overrightarrow{x_i} | \overrightarrow{x_j} >$$

1. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\overrightarrow{E}$. Donner une relation entre $G(\mathcal{B})$ et $G(\mathcal{B}')$.
2. Soit $X = {}^t(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_k})$ une famille libre de $\overrightarrow{E}$ et $V = (\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_k})$ la famille orthogonale (non normée) obtenue en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à X. Donner $\det G(X)$ en fonction des $< \overrightarrow{v_i} | \overrightarrow{v_i} >$, $1 \leq i \leq k$.
3. En déduire que la distance d d'un vecteur $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E}$ au sous-espace $< \overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_k} >$ est donnée par :

$$d = \sqrt{\frac{\det(G(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_n}, \overrightarrow{x}))}{\det(G(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_n}))}}$$

Exercice 7 (Examen Janvier 2007)

Dans cet exercice, $\overrightarrow{E}$ désigne un espace vectoriel euclidien de dimension 3.

On appelle **demi-tour** toute rotation vectorielle $r_\pi \in O^+(\overrightarrow{E})$ d'angle π autour d'une droite vectorielle $\overrightarrow{D}$ (*i.e.* toute symétrie orthogonale $s_{\overrightarrow{D}} \in O(\overrightarrow{E})$ par rapport à une droite $\overrightarrow{D}$.

On rappelle que tout endomorphisme orthogonal $f \in O^+(\overrightarrow{E})$ est une composée de demi-tours.

Le but de cet exercice est de montrer que le groupe $O^+(\overrightarrow{E})$ ne possède pas de sous-groupe distingué autre que $\{Id_{\overrightarrow{E}}\}$ et $O^+(\overrightarrow{E})$.

1. (a) Montrer que tout endomorphisme $f \in O^+(\overrightarrow{E})$ admet 1 comme valeur propre.
   (b) Soit $\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}$ un vecteur propre de f pour la valeur propre 1.
   Montrer que $f(< \overrightarrow{e} >^\perp) =< \overrightarrow{e} >^\perp$.
   (c) En déduire que tout endomorphisme orthogonal $f \in O^+(\overrightarrow{E}) \backslash \{Id_{\overrightarrow{E}}\}$ est une rotation autour d'un axe.
2. (a) Soient $\overrightarrow{D_1}$,$\overrightarrow{D_2}$ deux droites vectorielles distinctes de $\overrightarrow{E}$. Montrer, en décrivant un procédé de construction, qu'il existe un endomorphisme orthogonal $\rho \in O^+(\overrightarrow{E})$ tel que $\rho(\overrightarrow{D_1}) = \overrightarrow{D_2}$. Cet endomorphisme ρ est-il unique ?
   (b) Quelle est la nature de $\rho \circ s_{D_1} \circ \rho^{-1}$?
3. Soit H un sous-groupe non trivial de $O^+(\overrightarrow{E})$ (*i.e.* différent de $\{Id_{\overrightarrow{E}}\}$)
   (a) Montrer que H contient une rotation r_α d'angle $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
   (On pourra commencer à montrer que H contient une rotation r_β d'angle $\beta \in]0, \pi]$)
   (b) Soit $\overrightarrow{e_1}$ le vecteur unitaire dirigeant l'axe de r_α. Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base orthonormée de $\overrightarrow{E}$ complétant $\overrightarrow{e_1}$.
   Montrer qu'il existe une droite vectorielle $\overrightarrow{D} \subset Vect(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ telle que $r_\alpha(\overrightarrow{D})$ et $\overrightarrow{D}$ soient orthogonales.
4. On suppose à présent que le sous-groupe $H \subset O^+(\overrightarrow{E})$ est distingué
   (*i.e.* $\forall f \in O^+(\overrightarrow{E}), \forall h \in H,\ f \circ h \circ f^{-1} \in H$)
   Soient $\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}$ deux droites vectorielles distinctes de $\overrightarrow{E}$.
   Montrer que si $s_{\overrightarrow{D_1}} \in H$, alors on a aussi $s_{\overrightarrow{D_2}} \in H$
5. Soient r_α et $\overrightarrow{D}$ définis comme à la question 3.
   Montrer que $r = s_{\overrightarrow{D}} \circ r_\alpha \circ s_{\overrightarrow{D}} \circ r_\alpha^{-1}$ est un demi-tour de H.
6. En déduire que si $H \subset O^+(\overrightarrow{E})$ est un sous-groupe distingué non trivial, alors $H = O^+(\overrightarrow{E})$.
7. Déterminer le centre de $O^+(\overrightarrow{E})$.