Exercice 4 (Partiel Septembre 1997)

Soit E un espace affine euclidien de dimension 2, de direction $\overrightarrow{E}$, muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère les points :

$$A = O + \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \quad B = O - \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \quad C = O - \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}, \quad D = O + \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$$

On désigne par G l'ensemble des isométries affines de E laissant globalement invariant l'ensemble $\{A, B, C, D\}$.

1. **Montrer que tout élément de G laisse le point O invariant.**
   On a :
   $$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$$
   Ainsi, O est l'isobarycentre des points A, B, C, D. Ainsi, tout élément de G fixe le point O.

2. **Montrer que, $(G, \circ)$ est un groupe isomorphe à un sous-groupe du groupe orthogonal $O(\overrightarrow{E})$.**
   $Id_E \in G$.
   $\forall f \in G$, f est bijective et $f(\{A, B, C, D\}) = \{A, B, C, D\} \Leftrightarrow f^{-1}(\{A, B, C, D\}) = \{A, B, C, D\}$.
   D'où $\forall f, g \in G$, $f \circ g^{-1}(\{A, B, C, D\}) = f(\{A, B, C, D\}) = \{A, B, C, D\}$.
   Ainsi $(G, \circ)$ est bien un groupe en tant que sous-groupe de $Iso(E)$.
   De plus, comme tout élément de G fixe le point O, on peut identifier chaque application affine et sa partie linéaire : ainsi $(G, \circ)$ est isomorphe à un sous-groupe de $O(\overrightarrow{E})$.

3. **Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique $\mathcal{S}_4$.**
   Pour tout $f \in G$, on a $f(\{A, B, C, D\}) = \{A, B, C, D\}$: f induit donc une permutation σ_f de l'ensemble des sommets $\{A, B, C, D\}$. Comme on a de manière claire $\sigma_{f \circ g} = \sigma_f \circ \sigma_g$, l'application $\varphi : f \mapsto \sigma_f$ est un morphisme de groupes de G dans $\mathcal{S}_4$.
   De plus, si $\sigma_f = Id_{\mathcal{S}_4}$, on a $f = Id_E$ car f fixe quatre points non alignés. Ainsi φ est injectif.
   Ainsi, G est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique $\mathcal{S}_4$.

4. **Trouver un sous-groupe cyclique d'ordre 4 de G.**
   Soit f l'isométrie qui correspond à la permutation circulaire $A \mapsto B \mapsto C \mapsto D \mapsto A$.
   Alors, on a clairement $f^4 = Id_E$ et ainsi $\{Id_E, f, f^2, f^3\}$ est un sous-groupe de G, d'ordre 4 qui est cyclique.

5. **Trouver tous les éléments de G.**
   Soit r l'application telle que :
   $$r(A) = B, r(B) = C, r(C) = D, r(D) = A$$
   Montrons que r est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$
   On a $\overrightarrow{r}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{r}(-\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) = -\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$.
   On en déduit que $\overrightarrow{r}(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{r}(\overrightarrow{j}) = -\overrightarrow{i}$.
   $\overrightarrow{r}$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   On en déduit que l'angle de la rotation θ vérifie $2\cos\theta = 0$: $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$. Or $r(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{j}$ et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est une base orthonormée directe donc $\theta = \frac{\pi}{2}$. On a donc $r = r_{\pi/4}$

   On en déduit que $r^2 = s_O$. et $r^3 = r^{-1}$ est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Posons s la symétrie par rapport à l'axe (Ox). Alors s est clairement dans G et on a :

$$s(A) = D, \quad s(D) = A, \quad s(B) = C, \quad s(C) = B$$

Par composition $s \circ r$ est également dans G : on a

$$s \circ r(A) = s(B) = C, \quad s \circ r(B) = s(C) = B, \quad s \circ r(C) = s(D) = A, \quad s \circ r(D) = s(A) = D$$

On voit que $s \circ r$ est la symétrie par rapport à la droite (BD).

De même $s \circ r^2 = -s = s_{Vect(\overrightarrow{j})}$: on a

$$s \circ r^2(A) = B, \quad s \circ r^2(B) = A, \quad s \circ r^2(C) = D, \quad s \circ r^2(D) = C$$

Enfin $s \circ r^3$ est caractérisée par :

$$s \circ r^3(A) = A, \quad s \circ r^3(B) = D, \quad s \circ r^3(C) = C, \quad s \circ r^3(D) = B$$

On voit que $s \circ r^3$ est la symétrie par rapport à la droite (AC).

6. **Dresser la table de G.**
   On obtient facilement la table suivante :

$\circ$	Id_E	$r_{\pi/4}$	s_O	$r_{3\pi/4}$	$s_{(Ox)}$	$s_{(BD)}$	$s_{(Oy)}$	$s_{(AC)}$
Id_E	Id_E	$r_{\pi/4}$	s_O	$r_{3\pi/4}$	$s_{(Ox)}$	$s_{(BD)}$	$s_{(Oy)}$	$s_{(AC)}$
$r_{\pi/4}$	$r_{\pi/4}$	s_O	$r_{3\pi/4}$	Id_E	$s_{(AC)}$	$s_{(Ox)}$	$s_{(BD)}$	$s_{(Oy)}$
s_O	s_O	$r_{3\pi/4}$	Id_E	r	$s_{(Oy)}$	$s_{(AC)}$	$s_{(Ox)}$	$s_{(BD)}$
$r_{3\pi/4}$	$r_{3\pi/4}$	Id_E	$r_{\pi/4}$	s_O	$s_{(BD)}$	$s_{(Oy)}$	$s_{(AC)}$	$s_{(Ox)}$
$s_{(Ox)}$	$s_{(Ox)}$	$s_{(BD)}$	$s_{(Oy)}$	$s_{(AC)}$	Id_E	$r_{\pi/4}$	s_O	$r_{3\pi/4}$
$s_{(BD)}$	$s_{(BD)}$	$s_{(Oy)}$	$s_{(AC)}$	$s_{(Ox)}$	$r_{3\pi/4}$	Id_E	$r_{\pi/4}$	s_O
$s_{(Oy)}$	$s_{(Oy)}$	$s_{(AC)}$	$s_{(Ox)}$	$s_{(BD)}$	s_O	$r_{3\pi/4}$	Id_E	$r_{\pi/4}$
$s_{(AC)}$	$s_{(AC)}$	$s_{(Ox)}$	$s_{(BD)}$	$s_{(Oy)}$	$r_{\pi/4}$	s_O	$r_{3\pi/4}$	Id_E

7. **Montrer que G est engendré par deux symétries orthogonales par rapport à des droites.**
   D'après la table et ce qui précède, on a vu que $G =< r, s >$ où s est déjà une symétrie orthogonale par rapport à une droite $D = (Ox)$ et r une rotation d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$
   Exprimons $r = s' \circ s$ où s' est une symétrie orthogonale par rapport à une droite D'.
   En effet, il suffit de prendre s' de telle sorte que l'angle entre D et D' soit égal à $\dfrac{\theta}{2}$, autrement dit $\dfrac{\pi}{4}$. : on prend donc $s' = s_{(AC)}$.
   Alors $G =< s_{(Ox)}, s_{(AC)} >$