Fiche 5 - Géométrie affine euclidienne

Exercice 1 : Décomposition canonique d'une isométrie affine

Soit E un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$ e.v. euclidien.

1. Soit $\overrightarrow{h} \in O(\overrightarrow{E})$. Montrer que $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{h} - Id_{\overrightarrow{E}}) = \left(\mathrm{Im}(\overrightarrow{h} - Id_{\overrightarrow{E}})\right)^{\perp}$.
2. Soit f une isométrie de E. Montrer qu'il existe un unique couple $(g, \overrightarrow{u})$ où g est une isométrie de E admettant un point fixe et $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}})$ tels que $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g = g \circ t_{\overrightarrow{u}}$.
   Montrer que si on a une expression $f = t_{\overrightarrow{v}} \circ g = g \circ t_{\overrightarrow{v}}$, avec g isométrie ayant un point fixe, alors nécessairement $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}})$
3. Soit f une isométrie de E telle que f^n $(n \geq 2)$ ait un point fixe. Montrer que f a un point fixe.

Exercice 2 : Exemples

Reconnaître les applications affines suivantes de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et préciser leurs éléments caractéristiques :

$$f_1 : \begin{cases} x' = & -y+1 \\ y' = & -x+1 \end{cases}, \quad f_2 : \begin{cases} x' = & y-1 \\ y' = & x+3 \end{cases}, \quad f_3 : \begin{cases} x' = & -y+1 \\ y' = & x-1 \end{cases}$$

$$f_4 : \begin{cases} x' = & -z-2 \\ y' = & -x+1 \\ z' = & y+1 \end{cases}, \quad f_5 : \begin{cases} x' = & -z+2 \\ y' = & -x+1 \\ z' = & y+1 \end{cases}, \quad f_6 : \begin{cases} x' = & -z+2 \\ y' = & x+1 \\ z' = & y+1 \end{cases}$$

Exercice 3 : Groupe diédral

Dans le plan affine euclidien E, soit P un polygone convexe régulier à n côtés $(n \geq 3)$, de sommets $A_0, \dots, A_{n-1}$.

$$\mathbb{D}_n = \{f : E \to E,\ f \text{ affine },f(P) = P\}$$

1. Montrer que $\mathbb{D}_n$ est un sous-groupe fini de $Iso(E)$. On l'appelle le **groupe diédral d'ordre n.**
2. Dans $\mathbb{D}_n$, déterminer le stabilisateur d'un sommet A_i de P. En déduire le cardinal de $\mathbb{D}_n$.
3. Décrire les éléments de $\mathbb{D}_n$ et montrer que $\mathbb{D}_n =< r, s >$ avec r, s tels que :
   $$r^n = Id_E, \quad s^2 = Id_E, \quad (sr)^2 = Id_E$$
   On admettra que tout groupe fini $G =< r, s >$, $|G| = n$ avec r, s vérifiant les trois conditions précédentes est isomorphe à $\mathbb{D}_n$.
4. Soit G un sous-groupe fini de $Iso(E)$. Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{D}_n$.

Exercice 4 (Partiel Septembre 1997)

Soit E un espace affine euclidien de dimension 2, de direction $\overrightarrow{E}$, muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
On considère les points :

$$A = O + \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \quad B = O - \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \quad C = O - \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}, \quad D = O + \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$$

On désigne par G l'ensemble des isométries affines de E laissant globalement invariant l'ensemble $\{A, B, C, D\}$.

1. Montrer que tout élément de G laisse le point O invariant.
2. Montrer que, $(G, \circ)$ est un groupe isomorphe à un sous-groupe du groupe orthogonal $O(\overrightarrow{E})$.
3. Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique $\mathcal{S}_4$.
4. Trouver un sous-groupe cyclique d'ordre 4 de G.
5. Trouver tous les éléments de G.
6. Dresser la table de G.
7. Montrer que G est engendré par deux symétries orthogonales par rapport à des droites.

Exercice 5 : Sous-groupes finis de $Iso^+(E)$, $\dim(E) = 3$

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3, $Iso^+(E)$ le groupe des déplacements de E.
Soit G un sous-groupe fini, d'ordre $n \geq 2$, de $Iso^+(E)$.

1. Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe fini de $O^+(\overrightarrow{E})$ où $\overrightarrow{E}$ est la direction de E.

   Dans la suite, on identifiera donc E à $\overrightarrow{E}$ et G sera considéré comme un sous-groupe fini de $O^+(E)$, d'ordre $n \geq 2$.
2. Soit $\mathbb{S}_2$ la sphère unité de E. Vérifier que toute rotation $r \in O^+(E) \backslash \{Id_E\}$ fixe exactement deux points de $\mathbb{S}_2$.
3. On appelle **pôle de** G tout point de $\mathbb{S}_2$ invariant par (au moins) une rotation de $G \backslash \{Id_E\}$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles de G. Montrer que $\mathcal{P}$ est globalement invariant sous l'action de G.
4. Soit H un groupe fini quelconque et X un ensemble (fini) sur lequel agit H. Notons k le nombre d'orbites sous cette action. Montrer la formule de Burnside

   $$k = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} |Fix(h)|$$

   où $Fix(h) = \{x \in X \ / \ h(x) = x\}$ désigne l'ensemble des points fixes par h.
5. En déduire le nombre d'orbites pour l'action de G sur $\mathcal{P}$ est 2 ou 3.
6. Montrer que si l'action admet 2 orbites, alors G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
7. On suppose que l'action admet 3 orbites : $\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3\}$ avec $|\mathcal{P}_1| \geq |\mathcal{P}_2| \geq |\mathcal{P}_3|$.
   On note pour $i = 1, 2, 3$: $n_i = |G_i|$ où G_i désigne le stabilisateur d'un point de $\mathcal{P}_i$.
   (a) Montrer que pour tout $i = 1..3$, on a $|\mathcal{P}_i| = \dfrac{|G|}{n_i}$.
   (b) Déterminer tous les triplets possibles (n_1, n_2, n_3).
   (c) Montrer que si $n_2 = 2$, alors on a n pair et G est isomorphe au groupe diédral $\mathbb{D}_{\frac{n}{2}}$
   (d) Montrer que si $n_2 = n_3 = 3$, alors G est isomorphe au groupe alterné $\mathcal{A}_4$.
   (e) Montrer que si $n_2 = 3$ et $n_3 = 4$, alors G est isomorphe au groupe symétrique $\mathcal{S}_4$.
   (f) Montrer que si $n_2 = 3$ et $n_3 = 5$, alors G est isomorphe au groupe alterné $\mathcal{A}_5$.

Exercice 6 : Groupe des similitudes

Soit E un espace affine euclidien de direction $\overrightarrow{E}$.

Une application $f : E \to E$ est appelée une **similitude** si f conserve les rapports de distance, c'est-à-dire il existe $k_f \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que

$$\forall M, N \in E, \ \|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = k\|\overrightarrow{MN}\|$$

On note $Sim(E)$ l'ensemble des similitudes de E.

1. Montrer que $Sim(E)$ est un sous-groupe du groupe affine $GA(E)$.
2. Montrer que les groupes $\mathcal{T}(E)$ des translations de E, $\mathcal{H}$ des homothéties-translations de E, et $Iso(E)$ des isométries de E sont des sous-groupes distingués de $Sim(E)$.
3. Soit $f \in Sim(E)$. Supposons que f ait un unique point fixe A. Montrer qu'il existe un unique couple (g, h) où g est une isométrie et h une homothétie de rapport positif telles que $f = g \circ h = h \circ g$.
4. Soit $f \in Sim(E)$ tel que $k_f \neq 1$. Montrer que f admet un unique point fixe A.

Exercice 7 : Expression complexe

On identifie le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormal au plan complexe.

1. Montrer que le groupe $Iso^+(E)$ des déplacements du plan est l'ensemble des applications :

$$f_{a,\theta} : z \longmapsto e^{i\theta}\, z + a, \qquad \text{avec } a \in \mathbb{C}, \theta \in [0, 2\pi[$$

2. Montrer que le groupe $Iso^-(E)$ des antidéplacements du plan est l'ensemble des applications :

$$g_{a,\theta} : z \longmapsto e^{i\theta}\, \overline{z} + a, \qquad \text{avec } a \in \mathbb{C}, \theta \in [0, 2\pi[$$

   Donner l'expression canonique de $g_{a,\theta}$.
3. Déterminer l'expression complexe des similitudes du plan.

Exercice 8 : Inversion plane

Soit E un plan affine euclidien muni d'un $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé de E.
Soit $A \in E$ et $k \in \mathbb{R}^{+*}$. On définit $I_{A,k}$ l'**inversion de pôle A et de rapport k** par :

$$\forall M \in E \backslash \{A\},\ I_{A,k}(M) = A + \frac{k}{\|\overrightarrow{AM}\|^2}\, \overrightarrow{AM}$$

Autrement dit, $A, M, I_{A,k}(M)$ sont alignés et $< \overrightarrow{AM} | \overrightarrow{AI_{A,k}(M)} >= k$.

On notera I l'inversion de pôle O et de rapport k.

1. Montrer que pour tous points A, B de $E\backslash\{O\}$, on a :

$$\|\overrightarrow{I(A)I(B)}\| = \frac{k\|\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{OA}\|\, \|\overrightarrow{OB}\|}$$

2. Soit $M(x, y) \in E\backslash\{O\}$. Déterminer les coordonnées du point $I(M)$.
3. En déduire l'expression complexe de l'inversion I.
4. Montrer que I est involutive (*i.e.* $I^2 = Id_{E\backslash\{O\}}$)
5. Montrer que l'ensemble des points fixes de I est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{k}$, appelé le *cercle d'inversion* de I.
6. Montrer que :
   (a) Une droite de E est invariante par I si et seulement si elle passe par O.
   (b) L'image par I d'une droite ne passant pas par O est un cercle passant par O, privé de O.
   (c) L'image par I d'un cercle passant par O, privé de O, est une droite ne passant pas par O.
   (d) L'image par I d'un cercle ne passant pas par O est un cercle ne passant pas par O.
7. Soient f, g deux inversions.
   (a) Montrer que $f \circ g \circ f^{-1}$ est soit une inversion, soit une réflexion (dans le plan privé d'au plus trois points)
   (b) Dans le cas où $h = f \circ g \circ f^{-1}$ est une inversion, en notant $\mathcal{C}$ le cercle d'inversion de g, montrer que le cercle d'inversion de h est $f(\mathcal{C})$.

Exercice 9 : Homographies du plan complexe complété

Soit E un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ que l'on identifiera au plan complexe $\mathcal{P}$.

La fonction complexe $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ a pour ensemble de définition $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Pour se débarasser de la contrainte $z \neq 0$, on ajoute à $\mathbb{C}$ un élément noté ∞, n'appartenant pas à $\mathbb{C}$ et on pose $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ avec les conventions : $\dfrac{1}{0} = \infty$ et $\dfrac{1}{\infty} = 0$.

On appelle **plan de Gauss** $\widehat{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \cup \{\Omega\}$ où $\mathcal{P}$ est le plan complexe et où Ω est un point n'appartenant pas à $\mathcal{P}$ et d'affixe ∞, appelé le **point à l'infini** de $\widehat{\mathcal{P}}$.

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ non tous nuls. On définit une application $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ de la manière suivante :

- $\forall z \in \mathbb{C} \ / \ cz + d \neq 0, \quad f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.
- $\forall z \in \mathbb{C} \ / \ cz + d = 0, \quad f(z) = \infty$.
- Si $c \neq 0$, $f(\infty) = \dfrac{a}{c}$.
- Si $c = 0$ et $a \neq 0$, $f(\infty) = \infty$.
- Si $a = c = 0$ et $d \neq 0$, $f(\infty) = \dfrac{b}{d}$.
- Si $a = c = d = 0$, $f(\infty) = \infty$.

1. Montrer que f ainsi définie est une bijection de $\widehat{\mathbb{C}}$ si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
   On appelle une telle fonction une **homographie**.
2. Montrer que l'application réciproque d'une homographie est une homographie.
3. On définit un cercle de $\widehat{\mathcal{P}}$ comme un cercle de $\mathcal{P}$. Une droite de $\widehat{\mathcal{P}}$ est la réunion d'une droite de $\mathcal{P}$ et du point à l'infini Ω.
   Montrer que l'image par une homographie d'un cercle ou une droite de $\widehat{\mathcal{P}}$ est un cercle ou une droite de $\widehat{\mathcal{P}}$.
4. Soit f_1 et f_2 les homographies définies par
   $$f_1(z) = \frac{z-1}{z+1}, \quad f_2(z) = \frac{z-i}{z+i}$$
   Montrer que f_1 et f_2 envoient respectivement le demi-plan droit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \ / \ Re(z) > 0\}$ et le demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ Im(z) > 0\}$ sur le disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| < 1\}$.
   Déterminer leur application réciproque.
5. Montrer que si (z_1, z_2, z_3) et (z'_1, z'_2, z'_3) sont trois triplets d'éléments distincts de $\widehat{\mathbb{C}}$, alors il existe une et une seule homographie f telle que
   $$f(z_1) = z'_1, \quad f(z_2) = z'_2, \quad f(z_3) = z'_3$$

   Soient $a, b, c, d \in \widehat{\mathbb{C}}$ tels que a, b, c soient distincts.
   Soit h_0 l'unique homographie telle que $h_0(a) = \infty$, $h_0(b) = 0$ et $h_0(c) = 1$.
   On définit le **birapport de** a, b, c, d, noté $[a, b, c, d]$ comme la valeur $h_0(d) \in \widehat{\mathbb{C}}$.
6. Pour tout $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, calculer $[\infty, 0, 1, z]$
7. Montrer que le birapport est invariant par homographie, c'est-à-dire si f est une homographie, alors
   $$[f(a), f(b), f(c), f(d)] = [a, b, c, d]$$
   (On pourra considérer l'homographie $h_0 f^{-1}$)
8. Donner une formule pour le birapport $[a, b, c, d]$

Exercice 10 : Puissance d'un point par rapport à un cercle

Soit E un plan affine euclidien. Soit $\Omega \in E$ et $R \geq 0$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω et de rayon R.

1. Soit $M \in E$. Soit D une droite passant par M et intersectant le cercle en deux points A et B (éventuellement confondus). On note A' le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à A. Montrer que :

$$< \overrightarrow{MA} | \overrightarrow{MB} > = < \overrightarrow{MA} | \overrightarrow{MA'} > = \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 - R^2$$

En particulier, cette valeur ne dépend pas de la droite D choisie. On appelle **puissance de M par rapport au cercle** $\mathcal{C}$ le réel :

$$\mathcal{C}(M) = < \overrightarrow{MA} | \overrightarrow{MB} >$$

2. Soit $M \in E$ un point extérieur à $\mathcal{C}$. Soient T et T' les points de contact des tangents à $\mathcal{C}$ issues de M. Montrer que

$$\mathcal{C}(M) = \|\overrightarrow{MT}\|^2 = \|\overrightarrow{MT'}\|^2$$

3. Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de E, on note :

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

Montrer que pour tout point $M(x_0, y_0) \in E$, on a :

$$\mathcal{C}(M) = x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + c$$

4. Soient A, B, C, D quatre points de E non alignés 3 à 3, et tels que (AB) ne soit pas parallèle à (CD). Notons $M = (AB) \cap (CD)$. Montrer que A, B, C, D, sont cocycliques si et seulement si

$$< \overrightarrow{MA} | \overrightarrow{MB} > = < \overrightarrow{MC} | \overrightarrow{MD} >$$

5. Soient A, B, C trois points de E non alignés. Soit $M \in (AB)$. Montrer que le cercle circonscrit à ABC est tangent à (MC) si et seulement si

$$< \overrightarrow{MA} | \overrightarrow{MB} > = \|\overrightarrow{MC}\|^2$$

6. On dit que **deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont orthogonaux** et on note $\mathcal{C} \perp \mathcal{C}'$ si et seulement s'ils sont sécants en deux points distincts, notés A et B, et que les tangentes en A à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont orthogonales.

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon R, $\mathcal{C}'$ un cercle de centre Ω' et de rayon R'.
Montrer que :

$$\mathcal{C} \perp \mathcal{C}' \Longleftrightarrow R^2 + R'^2 = \|\overrightarrow{\Omega\Omega'}\|^2 \Longleftrightarrow \mathcal{C}(\Omega') = R'^2 \Longleftrightarrow \mathcal{C}'(\Omega) = R^2$$

7. On considère les équations de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$:

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \quad \mathcal{C}' : x'^2 + y'^2 - 2ax' - 2by' + c' = 0$$

Montrer que

$$\mathcal{C} \perp \mathcal{C}' \Longleftrightarrow 2aa' + 2bb' = c + c'$$

Exercice 11 : Axe radical de deux cercles, Centre radical de trois cercles

Soit E un espace affine euclidien de dimension 2. On garde les notations de l'exercice 9 concernant $\mathcal{C}(M)$ la puissance d'un point M par rapport à un cercle $\mathcal{C}$.

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de E de centres $\Omega \neq \Omega'$.

1. Montrer que l'ensemble
$$\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'} = \{M \in E \ / \ \mathcal{C}(M) = \mathcal{C}'(M)\}$$
est une droite de E. On l'appelle **axe radical de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.**
2. Montrer que $\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'} \perp (\Omega\Omega')$.
3. On suppose que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{A, B\}$ avec $A \neq B$. Montrer que $\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'} = (AB)$.
4. On suppose que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{A\}$. Montrer que $\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ est la tangente commune aux cercles en A.
5. On se place dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On donne les équations :
$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \quad \mathcal{C}' : x'^2 + y'^2 - 2ax' - 2by' + c' = 0$$
Montrer que la droite $\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ a pour équation :
$$2(a' - a)x + 2(b' - b)y + (c - c') = 0$$
6. Soient $\mathcal{C}$,$\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$ trois cercles de centres $\Omega, \Omega', \Omega''$ non alignés.
   (a) Montrer que les trois axes radicaux $\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$, $\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}''}$ et $\Delta_{\mathcal{C}',\mathcal{C}''}$ sont concourants en un point γ, que l'on appelle **centre radical de $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$.**
   (b) On suppose que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \emptyset$. Construire $\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ en utilisant un cercle $\mathcal{C}''$ sécant à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.
   (c) Montrer que si $\mathcal{C}$,$\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ sont 2 à 2 orthogonaux, alors leur centre radical est l'orthocentre du triangle $\Omega\Omega'\Omega''$.

Exercice 12 : Faisceaux linéaires de cercles

Soit E un espace affine euclidien de dimension 2. On considère deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de E de centres Ω et Ω'

- Si $\Omega \neq \Omega'$, on appelle **faisceau linéaire de cercles** défini par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ l'ensemble des cercles Γ tels que $\Delta_{\mathcal{C},\Gamma} = \Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$.
- Si $\Omega = \Omega'$, on appelle **faisceau linéaire de cercles** défini par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ l'ensemble des cercles Γ de centre Ω.

On note dans les deux cas $\mathcal{F}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ le faisceau linéaire de cercles défini par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

1. Montrer que si $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{A, B\}$ avec $A \neq B$, alors $\mathcal{F}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ est l'ensemble des cercles passant par A et B. Les points A et B sont appelés les **points de base du faisceau $\mathcal{F}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$.**
2. Montrer que si $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{T\}$, alors $\mathcal{F}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ est l'ensemble des cercles tangents en T à $\mathcal{C}$ (et à $\mathcal{C}'$).
3. On suppose que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \emptyset$. On note $H = (\Omega\Omega') \cap \Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ et I et J les points de la droite $(\Omega\Omega')$ définis par :
$$\|\overrightarrow{HI}\|^2 = \|\overrightarrow{HJ}\|^2 = \mathcal{C}(H) = \mathcal{C}'(H)$$
Montrer que $\mathcal{F}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ est l'ensemble des cercles centrés sur $(\Omega\Omega')$ et orthogonaux au cercle de diamètre $[IJ]$.
Les points I et J sont appelés les **points limites du faisceau $\mathcal{F}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$.**
Montrer que les seuls cercles de rayon nul de $\mathcal{F}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ sont $\{I\}$ et $\{J\}$.
4. On munit E d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On donne les équations
$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \quad \mathcal{C}' : x'^2 + y'^2 - 2ax' - 2by' + c' = 0$$
Montrer que $\mathcal{F}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ est l'ensemble des cercles d'équations :
$$\alpha(x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c) + \beta(x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c') = 0 \quad \text{où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha + \beta \neq 0$$
5. Soit $\Gamma \in \mathcal{F}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ un cercle de centre ω et de rayon ρ. Montrer que
$$\rho^2\|\overrightarrow{\Omega\Omega'}\| + R^2\|\overrightarrow{\Omega'\omega}\| + R'^2\|\overrightarrow{\omega\Omega}\| + \|\overrightarrow{\Omega\Omega'}\|\,\|\overrightarrow{\Omega'\Omega}\|\,\|\overrightarrow{\omega\Omega}\| = 0$$