Fiche 5 - Géométrie affine euclidienne

Exercice 1 : Décomposition canonique d'une isométrie affine

Soit E un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$ e.v. euclidien.

1. **Soit $\overrightarrow{h} \in O(\overrightarrow{E})$. Montrer que Ker$(\overrightarrow{h} - Id_{\overrightarrow{E}}) = \left(\text{Im}(\overrightarrow{h} - Id_{\overrightarrow{E}})\right)^{\perp}$.**

   Soit $\overrightarrow{x} \in \text{Ker}(\overrightarrow{h} - Id_{\overrightarrow{E}})$: $\overrightarrow{h}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$.
   Soit $\overrightarrow{y} \in \text{Im}(\overrightarrow{h} - Id_{\overrightarrow{E}})$: $\exists \overrightarrow{z} \in \overrightarrow{E}$ / $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{h}(\overrightarrow{z}) - \overrightarrow{z}$.
   Alors :
   $$< \overrightarrow{x}|\overrightarrow{y} >=< \overrightarrow{x}|\overrightarrow{h}(\overrightarrow{z}) - \overrightarrow{z} >=< \overrightarrow{h}(\overrightarrow{x})|\overrightarrow{h}(\overrightarrow{z}) > - < \overrightarrow{x}|\overrightarrow{z} >= 0$$
   Donc $\text{Ker}(\overrightarrow{h} - Id_{\overrightarrow{E}}) \subset \left(\text{Im}(\overrightarrow{h} - Id_{\overrightarrow{E}})\right)^{\perp}$.
   Or, d'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker}(\overrightarrow{h} - Id_{\overrightarrow{E}}) = \dim \overrightarrow{E} - \dim \text{Im}(\overrightarrow{h} - Id_{\overrightarrow{E}}) = \dim \left(\text{Im}(\overrightarrow{h} - Id_{\overrightarrow{E}})\right)^{\perp}$.
   En conclusion, $\text{Ker}(\overrightarrow{h} - Id_{\overrightarrow{E}}) = \left(\text{Im}(\overrightarrow{h} - Id_{\overrightarrow{E}})\right)^{\perp}$.

2. **Soit f une isométrie de E. Montrer qu'il existe un unique couple $(g, \overrightarrow{u})$ où g est une isométrie de E admettant un point fixe et $\overrightarrow{u} \in$ Ker$(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}})$ tels que $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g = g \circ t_{\overrightarrow{u}}$.**
   Existence.
   Soit $A \in E$. Notons $A' = f(A) \in E$ et $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AA'}$.
   On a $\overrightarrow{a} \in \overrightarrow{E} = \text{Ker}(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}) \oplus \text{Im}(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}})$.
   Ainsi, $\exists \overrightarrow{x} \in \text{Ker}(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}), \exists \overrightarrow{y} \in \text{Im}(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}})$ tels que $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$.
   On a $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$ et $\exists \overrightarrow{z} \in \overrightarrow{E}$ / $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{z}) - \overrightarrow{z}$.
   Montrons que le point $B = A - \overrightarrow{z}$ est fixe par $g = t_{-\overrightarrow{x}} \circ f$.
   $$g(B) = t_{-\overrightarrow{x}} \circ f(B) = f(B) - \overrightarrow{x} = f(A) - \overrightarrow{f}(\overrightarrow{z}) - \overrightarrow{x} = A + \overrightarrow{a} - \overrightarrow{f}(\overrightarrow{z}) - \overrightarrow{x} = A + \overrightarrow{y} - \overrightarrow{f}(\overrightarrow{z}) = A - \overrightarrow{z} = B$$
   Unicité.
   Supposons que $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g = t_{\overrightarrow{u'}} \circ g'$ avec $g(B) = B$, $g(B') = B'$ et $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'} \in \text{Ker}(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}})$.
   On a $f(B) = B + \overrightarrow{u}$ et $f(B') = B' + \overrightarrow{u'}$. Ainsi $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{BB'}) = \overrightarrow{f(B)f(B')} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{u'} - \overrightarrow{u}$.
   Donc $\overrightarrow{u'} - \overrightarrow{u} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{BB'}) - \overrightarrow{BB'} \in \text{Im}(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}) \cap \text{Ker}(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}})$.
   Ainsi d'après 1, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u'}$ et alors $g = g'$.
   Commutativité.
   Soit $M \in E$. Alors :
   $$g \circ t_{\overrightarrow{u}}(M) = g(M + \overrightarrow{u}) = g(M) + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{u}) = g(M) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = g(M) + \overrightarrow{u} = t_{\overrightarrow{u}}(g(M)) = t_{\overrightarrow{u}} \circ g(M)$$
   Montrer que si on a une expression $f = t_{\overrightarrow{v}} \circ g = g \circ t_{\overrightarrow{v}}$, avec g isométrie ayant un point fixe, alors nécessairement $\overrightarrow{v} \in$ Ker$(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}})$
   $$B + \overrightarrow{v} = g(B) + \overrightarrow{v} = t_{\overrightarrow{v}} \circ g(B) = g \circ t_{\overrightarrow{v}}(B) = g(B + \overrightarrow{v}) = g(B) + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{v}) = B + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})$$
   Ainsi $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$.

3. **Soit f une isométrie de E telle que f^n $(n \geq 2)$ ait un point fixe. Montrer que f a un point fixe.**

Comme $f \in Iso(E)$, il existe un unique couple $(g, \overrightarrow{u})$ tel que $f = g \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ g$ avec g isométrie ayant un point fixe et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$.

Alors $f^n = t_{n\overrightarrow{u}} \circ g$ avec g isométrie ayant un point fixe. Comme f^n a un point fixe, on a $f^n = g$ et donc $n\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, autrement dit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Donc $f = g$: isométrie ayant un point fixe.

Exercice 2 : Exemples

Reconnaître les applications affines suivantes de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et préciser leurs éléments caractéristiques :

1. $f_1 : \left\{ \begin{array}{ll} x' = & -y+1 \\ y' = & -x+1 \end{array} \right.$: on a $X' = A_1X + B_1$ avec $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a clairement $A_1 \in O(E)$ et $\det(A_1) = -1$: f_1 est donc une isométrie du plan, et plus précisément un antidéplacement du plan.

Etudions $\overrightarrow{f_1}$ la partie linéaire de f_1.

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in E_1(\overrightarrow{f_1}) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -b = a \\ -a = b \end{array} \right. \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} \in Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Comme $\dim(E_1) = 1$, $\overrightarrow{f_1}$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle dirigée par $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Etudions f_1. Cherchons les points fixes de f_1.

Soit $X = (x, y) \in E$: $f_1(X) = X \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -y+1 \\ y = -x+1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow y = -x+1$

Ainsi, f_1 a une droite de points fixes, d'équation $y = -x+1$:

Finalement, f_1 est donc la <u>réflexion par rapport à la droite d'équation $y = -x+1$</u>

2. $f_2 : \left\{ \begin{array}{ll} x' = & y-1 \\ y' = & x+3 \end{array} \right.$: on a $X' = A_2X + B_2$ avec $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On a clairement $A_2 \in O(E)$ et $\det(A_2) = -1$: f_2 est donc une isométrie du plan, et plus précisément un antidéplacement du plan.

Etudions $\overrightarrow{f_2}$ la partie linéaire de f_2.

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in E_1(\overrightarrow{f_2}) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = a \\ a = b \end{array} \right. \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} \in Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Comme $\dim(E_1) = 1$, $\overrightarrow{f_2}$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle dirigée par $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Etudions f_2. Cherchons les points fixes de f_2.

Soit $X = (x, y) \in E$: $f_2(X) = X \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y-1 \\ y = x+3 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = x+1 \\ y = x+3 \end{array} \right.$

Ainsi, f_2 n'a pas de points fixes. C'est donc une symétrie glisée : $f_2 = t_{\overrightarrow{u}} \circ s = s \circ t_{\overrightarrow{u}}$ où s est une symétrie par rapport à une droite D et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}$.

La droite D correspond aux points $X = (a, b) \in E$ tels que $\overrightarrow{Xf_2(X)}$ soit colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{Xf_2(X)} \in Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} y-x-1 \\ x-y+3 \end{pmatrix} \in Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow y-x-1 = x-y+3 \Longleftrightarrow y = x+2$$

Donc la droite D de la réflexion est la droite d'équation $y = x+2$.

De plus, on a $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{Af(A)}$ pour $A \in D$.

Par exemple pour $A = (0,2)$, on a $\overrightarrow{Af(A)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

f_2 est donc la <u>symétrie glissée par rapport à la droite d'équation $y = x+2$ et de vecteur</u> $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. $f_3 : \begin{cases} x' = & -y+1 \\ y' = & x-1 \end{cases}$: on a $X' = A_3X + B_3$ avec $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   On a clairement $A_3 \in O(E)$ et $\det(A_3) = 1$: f_3 est donc une isométrie du plan, et plus précisément un déplacement du plan.

   Etudions $\overrightarrow{f_3}$ la partie linéaire de f_3.

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in E_1(\overrightarrow{f_3}) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} -b = a \\ a = b \end{cases} \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$

   Comme $\dim(E_1) = 0$, $\overrightarrow{f_3}$ est donc une rotation vectorielle d'angle θ vérifiant $2\cos(\theta) = tr(A) = 0$: $\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}$

   Or $det(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{f_3}(\overrightarrow{e_1})) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ donc $\sin(\theta) > 0$: on a $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

   On a donc $\overrightarrow{f_3}$ rotation vectorielle d'angle $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

   Etudions f_3. Cherchons les points fixes de f_3.

   Soit $X = (x,y) \in E$: $f_3(X) = X \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -y+1 \\ y = x-1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -x+1 \\ y = x-1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

   Ainsi, f_3 a un unique point fixe : le point $A = (1,0)$.

   f_3 est donc la <u>rotation de centre $A = (1,0)$ et d'angle</u> $\dfrac{\pi}{2}$

4. $f_4 : \begin{cases} x' = & -z-2 \\ y' = & -x+1 \\ z' = & y+1 \end{cases}$: on a $X' = A_4X + B_4$ avec $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   On a clairement $A_4 \in O(E)$ et $\det(A_4) = 1$: f_4 est donc une isométrie de l'espace, et plus précisément un déplacement de l'espace.

   Etudions $\overrightarrow{f_4}$ la partie linéaire de f_4.

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_1(\overrightarrow{f_4}) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ a = -b \\ b = c \end{cases} \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} \in Vect\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Comme $\dim(E_1) = 1$, $\overrightarrow{f_4}$ est donc une rotation vectorielle autour de l'axe $Vect\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle θ.

   On a $2\cos\theta + 1 = tr(A_4) \Longrightarrow \cos\theta = \dfrac{-1}{2} \Longrightarrow \theta = \pm\dfrac{2\pi}{3}$

De plus, le signe de θ est du signe de $\det(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{f_4}(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{u})$ où $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{x} \notin Vect(\overrightarrow{u})$

Ici :

$$\det(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{f_4}(\overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{u}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Ainsi, $\overrightarrow{f_4}$ est la rotation vectorielle d'axe dirigé par $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$

Etudions f_4. Cherchons les points fixes de f_4.

Soit $X = (x, y) \in E : f_4(X) = X \iff \begin{cases} x = -z - 2 \\ y = -x + 1 \\ z = y + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z - 2 \\ y = z + 3 \\ z = z + 4 \end{cases}$

Ainsi, f_4 n'a pas de point fixe : c'est un vissage $f = r \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ r$ où r est une rotation d'axe D et où $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}$.

L'axe D de r correspond aux points X de E tels que $\overrightarrow{Xf(X)} = \begin{pmatrix} -z - x - 2 \\ -x - y + 1 \\ y - z + 1 \end{pmatrix} \in Vect \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{Xf(X)} \in \overrightarrow{D} \iff \begin{cases} -z - x - 2 = x + y - 1 \\ -x - y + 1 = y - z + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + z + 1 = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -z - \dfrac{2}{3} \\ y = z + \dfrac{1}{3} \\ z = z \end{cases}$$

On a donc l'axe de r : $D = \left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, 0\right) + Vect \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

De plus $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{Af(A)}$ pour tout $A \in D$. En particulier pour $A = \left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, 0\right)$, on a $\overrightarrow{Af(A)} = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$

Ainsi f_4 est donc un <u>vissage d'axe $D =$</u> $\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, 0\right) + Vect \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ <u>et de vecteur $\overrightarrow{u} =$</u> $\dfrac{4}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. $f_5 : \begin{cases} x' = & -z + 2 \\ y' = & -x + 1 \\ z' = & y + 1 \end{cases}$: on a $X' = A_5 X + B_5$ avec $A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   On a clairement $A_5 \in O(E)$ et $\det(A_5) = 1$: f_5 est donc une isométrie de l'espace, et plus précisément un déplacement de l'espace.

   Immédiatement $A_5 = A_4$ et donc $\overrightarrow{f_5}$ est également la rotation vectorielle d'axe dirigé par $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$

   Etudions f_5. Cherchons les points fixes de f_5.

   Soit $X = (x, y) \in E : f_5(X) = X \iff \begin{cases} x = -z + 2 \\ y = -x + 1 \\ z = y + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z + 2 \\ y = z - 1 \\ z = z \end{cases}$

   Ainsi, f_5 a une droite de points fixes : la droite $D = (2, -1, 0) + Vect \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi f_5 est donc la rotation d'axe $D = (2,-1,0) + Vect\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$

6. $f_6 : \begin{cases} x' = & -z+2 \\ y' = & x+1 \\ z' = & y+1 \end{cases}$: on a $X' = A_6X + B_6$ avec $A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a clairement $A_6 \in O(E)$ et $\det(A_6) = -1$: f_6 est donc une isométrie de l'espace, et plus précisément un antidéplacement de l'espace.

Etudions $\overrightarrow{f_6}$ la partie linéaire de f_6.

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_1(\overrightarrow{f_6}) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ a = b \\ b = c \end{cases} \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$

Comme $\dim(E_1) = 0$, $\overrightarrow{f_6}$ est donc une composée commutative $\overrightarrow{r} \circ \overrightarrow{s} = \overrightarrow{s} \circ \overrightarrow{r}$ où $\overrightarrow{r}$ est une rotation vectorielle d'axe E_{-1} et où $\overrightarrow{s}$ est est la symétrie orthogonale par rapport à $(E_{-1})^{\perp}$.

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_{-1}(\overrightarrow{f_6}) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = c \\ a = -b \\ b = c \end{cases} \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} \in Vect\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(E_{-1})^{\perp} = \left\{ \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ a - b + c = 0 \right\}$$

De plus, l'angle θ de la rotation vérifie $2\cos\theta - 1 = tr(A_6) = 0$: $\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}$

Enfin, on sait que $\sin\theta$ est du signe de $\det(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{f_6}(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{u})$ où $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et où $\overrightarrow{x} \notin Vect(\overrightarrow{u})$.

$$\det(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{f_6}(\overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{u}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

Finalement $\overrightarrow{f_6}$ est la composée $\overrightarrow{r} \circ \overrightarrow{s} = \overrightarrow{s} \circ \overrightarrow{r}$ où $\overrightarrow{s}$ est la symétrie orthogonale par rapport au plan vectoriel $\overrightarrow{P}$ d'équation $x - y + z = 0$, et $\overrightarrow{r}$ est la rotation vectorielle d'axe $\overrightarrow{D} = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Etudions f_6. Cherchons les points fixes de f_6.

Soit $X = (x,y) \in E$: $f_6(X) = X \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -z+2 \\ y = x+1 \\ z = y+1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -z+2 \\ 2y = 2 \\ z = y+1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$

Ainsi f_6 a un unique point fixe : le point $A = (0,1,2)$. f_6 est donc une composée d'une rotation et d'une symétrie dont les axes et plans passent par le point A. L'axe de la rotation est donc $D = A + \overrightarrow{D}$ et le plan de la symétrie est donc $P = A + \overrightarrow{P}$

Finalement, f_6 est la composée $r \circ s = r \circ s$ où r est la rotation d'axe $D = (0,1,2) + Vect\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et où s est la symétrie par rapport au plan d'équation $x - y + z - 1 = 0$.

Exercice 3 : Groupe diédral

Dans le plan affine euclidien E, soit P un polygone convexe régulier à n côtés ($n \geq 3$), de sommets $A_0, \ldots, A_{n-1}$.

$$\mathbb{D}_n = \{f : E \to E,\ f \textbf{ affine },\ f(P) = P\}$$

1. **Montrer que $\mathbb{D}_n$ est un sous-groupe fini de $Iso(E)$. On l'appelle le groupe diédral d'ordre n.**
On prend comme origine du plan le point O isobarycentre des sommets de P. On choisit un axe (Ox) et une unité de longueur de manière à avoir le vecteur $\overrightarrow{OA_0}$ unitaire. On identifie E avec le plan complexe : les sommets de P sont alors les points d'affixes $\exp\left(\dfrac{2ik\pi}{n}\right)$, $k = 0..n-1$.

Soit $f \in \mathbb{D}_n$. Montrons que f est bijective.
Le polygone P engendre le plan E (car il contient trois points non alignés). De plus $f(E)$ contient $f(P) = P$ qui engendre E tout entier. Ainsi $f(E) = E$ et f est surjective. Comme $\dim E$ est finie, on a f bijective.

Montrer que $\mathbb{D}_n$ est un sous-groupe du groupe affine.
En effet, $Id_E(P) = P$: $Id_E \in \mathbb{D}_n$.
De plus, si $g \in \mathbb{D}_n$, on a $g(P) = P \Leftrightarrow g^{-1}(P) = P$. Donc $\forall f, g \in \mathbb{D}_n$, $f \circ g^{-1}(P) = f(P) = P$.
Donc $\mathbb{D}_n$ est un sous-groupe du groupe affine $GA(E)$.

Pourquoi $\mathbb{D}_n$ est fini ?
Pour tout $f \in \mathbb{D}_n$, on a $f(P) = P$: f induit donc une permutation σ_f de l'ensemble des sommets de P. Comme on a de manière claire $\sigma_{f\circ g} = \sigma_f \circ \sigma_g$, l'application $\varphi : f \mapsto \sigma_f$ est un morphisme de groupes de $\mathbb{D}_n$ dans $\mathcal{S}_n$.
De plus, si $\sigma_f = Id_{\mathcal{S}_n}$, on a $f = Id_E$ car l'ensemble des sommets de P contient au moins trois points non alignés fixes. Ainsi φ est injectif.
On en déduit que $|\mathbb{D}_n| \leq |\mathcal{S}_n| = n!$. En particulier $\mathbb{D}_n$ est un groupe fini.
Remarquons déjà que tout $f \in \mathbb{D}_n$ doit laisser fixe l'isobarycentre O des sommets de P.

Pourquoi a-t-on $\mathbb{D}_n \subset Iso(E)$?
Notons $A_i = f(A_0)$, $A_j = f(A_1)$ et $A_k = f(A_{n-1}$. Ce sont des sommets de P. Comme f est affine bijective, c'est un homéomorphisme de E qui envoie la frontière de P sur la frontière de P. Ainsi, les segments $f([A_0A_1]) = [A_iA_j]$, $f([A_0, A_{n-1}]) = [A_iA_k]$ sont nécessairement les deux arêtes de P issues du point A_i.
On sait qu'il existe un unique isométrie g qui envoie le triangle $A_0A_1A_{n-1}$ sur le triangle $A_iA_jA_k$. On a alors nécessairement $f = g$ car f et g coincident sur le repère affine $A_0A_1A_{n-1}$. Ainsi tout $f \in \mathbb{D}_n$ est une isométrie.

2. **Dans $\mathbb{D}_n$, déterminer le stabilisateur d'un sommet A_i de P. En déduire le cardinal de $\mathbb{D}_n$.**
Cherchons le stabilisateur de A_0 : $(\mathbb{D}_n)_{A_0} = \{f \in \mathbb{D}_n \ / \ f(A_0) = A_0\}$.
Soit $f \in \mathbb{D}_n$ tel que $f(A_0) = A_0$. Comme f est un homéomorphisme, $f([A_0A_1])$ est un autre segment de la frontière de P reliant A_0 à un autre sommet de P : ce ne peut être que $[A_0A_1]$ ou $[A_0A_{n-1}]$.
La symétrie orthogonale s par rapport à l'axe (Ox) et Id_E sont des éléments de $\mathbb{D}_n$ qui fixent A_0 et envoient A_1 sur A_1 ou A_{n-1}.
Ce sont les seuls car (O, A_0, A_1) est un repère affine qui caractérise de manière unique l'application affine f.

$$(\mathbb{D}_n)_{A_0} = \{Id_E, s\}$$

Quelle est l'orbite du point A_0 ?

Pour tout i, la symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice du segment $[A_iA_{i+1}]$ est clairement un élément de $\mathbb{D}_n$ et envoie le point A_i sur le point A_{i+1}. Par composition de telles symétries, on peut donc envoyer A_0 sur n'importe quel autre sommet.

$$Orb(A_0) = P = \{A_0, A_1, \dots, A_{n-1}\}$$

Or, on sait que $|Orb(A_0)| = \dfrac{|\mathbb{D}_n|}{|(\mathbb{D}_n)_{A_0}|}$.

On en déduit donc que le cardinal de D_n est $2n$.

3. **Décrire les éléments de $\mathbb{D}_n$ et montrer que $\mathbb{D}_n =< r, s >$ avec r, s tels que :**

$$r^n = Id_E, \quad s^2 = Id_E, \quad (sr)^2 = Id_E$$

On admettra que tout groupe fini $G =< r, s >$, $|G| = n$ avec r, s vérifiant les trois conditions précédentes est isomorphe à $\mathbb{D}_n$.

On connaît $2n$ éléments évidents dans $\mathbb{D}_n$:

– les n rotations éléments du groupe cyclique $\{Id_E, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$ où r est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$.

– les isométries indirectes $s, sr, \dots, sr^{n-1}$ qui sont des symétries car elles laissent O fixe.

Ce sont donc exactement les $2n$ éléments de $\mathbb{D}_n$.

Si n est impair, les symétries précédentes sont les n symétries par rapport aux médiatrices des côtés. Si n est pair, on a $\dfrac{n}{2}$ symétries par rapport aux médiatrices et $\dfrac{n}{2}$ symétries par rapport aux bissectrices. Ainsi :

$$\mathbb{D}_n = \{Id_E, r, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$$

Autrement dit, $\mathbb{D}_n =< r, s >$ avec $r^n = Id_E$, $s^2 = Id_E$ et $(sr)^2 = Id_E$.

4. **Soit G un sous-groupe fini de $Iso(E)$. Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{D}_n$.**

Soit G un sous-groupe fini de $Iso(E)$ de cardinal fini n.

Soit $A_1 \in E$. Notons $Orb(A_1) = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ l'orbite (finie) de A_1 sous l'action du groupe G. Alors tout élément $g \in G$ permute les éléments de $Orb(A_1)$: il laisse fixe l'isobarycentre O de ces points.

Tous les éléments de G ont donc au moins un point fixe commun O. Choisissons un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$: on peut alors identifier E avec le plan complexe.

Supposons que $G \subset Iso^+(E)$, avec $|G| = n$. Alors tout élément $g \in G$ est une rotation de centre O, de la forme $z \mapsto e^{i\theta_g} z$. Ainsi $\{e^{i\theta_g}, g \in G\}$ est un sous-groupe fini du groupe $(\mathbb{C}^*, .)$. G est alors isomorphe à $\mathbb{U}_n$. Ainsi $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Si G contient un antidéplacement s, alors s laisse fixe O est une symétrie orthogonale par rapport à une droite D passant par O.

Alors $G = G^+ \cup sG^-$, $|G| = 2n$ avec $G^+ = \{Id_E, r, \dots, r^{n-1}\}$ cyclique d'après ce qui précède, engendré par une rotation r d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$. Puisque rs est un antidéplacement qui a un point fixe O, c'est une symétrie orthogonale et donc $(rs)^2 = Id_E$.

On a alors $G \simeq \mathbb{D}_n$.

Exercice 4 (Partiel Septembre 1997)

Soit E un espace affine euclidien de dimension 2, de direction $\overrightarrow{E}$, muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère les points :

$$A = O + \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \quad B = O - \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \quad C = O - \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}, \quad D = O + \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$$

On désigne par G l'ensemble des isométries affines de E laissant globalement invariant l'ensemble $\{A, B, C, D\}$.

1. **Montrer que tout élément de G laisse le point O invariant.**
   On a :
   $$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$$
   Ainsi, O est l'isobarycentre des points A, B, C, D. Ainsi, tout élément de G fixe le point O.

2. **Montrer que, $(G, \circ)$ est un groupe isomorphe à un sous-groupe du groupe orthogonal $O(\overrightarrow{E})$.**
   $Id_E \in G$.
   $\forall f \in G,\ f$ est bijective et $f(\{A, B, C, D\}) = \{A, B, C, D\} \Leftrightarrow f^{-1}(\{A, B, C, D\}) = \{A, B, C, D\}$.
   D'où $\forall f, g \in G,\ f \circ g^{-1}(\{A, B, C, D\}) = f(\{A, B, C, D\}) = \{A, B, C, D\}$.
   Ainsi $(G, \circ)$ est bien un groupe en tant que sous-groupe de $Iso(E)$.
   De plus, comme tout élément de G fixe le point O, on peut identifier chaque application affine et sa partie linéaire : ainsi $(G, \circ)$ est isomorphe à un sous-groupe de $O(\overrightarrow{E})$.

3. **Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique $\mathcal{S}_4$.**
   Pour tout $f \in G$, on a $f(\{A, B, C, D\}) = \{A, B, C, D\}$: f induit donc une permutation σ_f de l'ensemble des sommets $\{A, B, C, D\}$. Comme on a de manière claire $\sigma_{f \circ g} = \sigma_f \circ \sigma_g$, l'application $\varphi : f \mapsto \sigma_f$ est un morphisme de groupes de G dans $\mathcal{S}_4$.
   De plus, si $\sigma_f = Id_{\mathcal{S}_4}$, on a $f = Id_E$ car f fixe quatre points non alignés. Ainsi φ est injectif.
   Ainsi, G est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique $\mathcal{S}_4$.

4. **Trouver un sous-groupe cyclique d'ordre 4 de G.**
   Soit f l'isométrie qui correspond à la permutation circulaire $A \mapsto B \mapsto C \mapsto D \mapsto A$.
   Alors, on a clairement $f^4 = Id_E$ et ainsi $\{Id_E, f, f^2, f^3\}$ est un sous-groupe de G, d'ordre 4 qui est cyclique.

5. **Trouver tous les éléments de G.**
   Soit r l'application telle que :
   $$r(A) = B, r(B) = C, r(C) = D, r(D) = A$$
   Montrons que r est la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$
   On a $\overrightarrow{r}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{r}(-\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) = -\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$.
   On en déduit que $\overrightarrow{r}(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{r}(\overrightarrow{j}) = -\overrightarrow{i}$.
   $\overrightarrow{r}$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   On en déduit que l'angle de la rotation θ vérifie $2\cos\theta = 0$: $\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}$. Or $r(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{j}$ et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est une base orthonormée directe donc $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. On a donc $r = r_{\pi/4}$

   On en déduit que $r^2 = s_O$. et $r^3 = r^{-1}$ est la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Posons s la symétrie par rapport à l'axe (Ox). Alors s est clairement dans G et on a :

$$s(A) = D, \quad s(D) = A, \quad s(B) = C, \quad s(C) = B$$

Par composition $s \circ r$ est également dans G : on a

$$s \circ r(A) = s(B) = C, \quad s \circ r(B) = s(C) = B, \quad s \circ r(C) = s(D) = A, \quad s \circ r(D) = s(A) = D$$

On voit que $s \circ r$ est la symétrie par rapport à la droite (BD).

De même $s \circ r^2 = -s = s_{Vect(\overrightarrow{j})}$: on a

$$s \circ r^2(A) = B, \quad s \circ r^2(B) = A, \quad s \circ r^2(C) = D, \quad s \circ r^2(D) = C$$

Enfin $s \circ r^3$ est caractérisée par :

$$s \circ r^3(A) = A, \quad s \circ r^3(B) = D, \quad s \circ r^3(C) = C, \quad s \circ r^3(D) = B$$

On voit que $s \circ r^3$ est la symétrie par rapport à la droite (AC).

6. **Dresser la table de G.**

On obtient facilement la table suivante :

$\circ$	Id_E	$r_{\pi/4}$	s_O	$r_{3\pi/4}$	$s_{(Ox)}$	$s_{(BD)}$	$s_{(Oy)}$	$s_{(AC)}$
Id_E	Id_E	$r_{\pi/4}$	s_O	$r_{3\pi/4}$	$s_{(Ox)}$	$s_{(BD)}$	$s_{(Oy)}$	$s_{(AC)}$
$r_{\pi/4}$	$r_{\pi/4}$	s_O	$r_{3\pi/4}$	Id_E	$s_{(AC)}$	$s_{(Ox)}$	$s_{(BD)}$	$s_{(Oy)}$
s_O	s_O	$r_{3\pi/4}$	Id_E	r	$s_{(Oy)}$	$s_{(AC)}$	$s_{(Ox)}$	$s_{(BD)}$
$r_{3\pi/4}$	$r_{3\pi/4}$	Id_E	$r_{\pi/4}$	s_O	$s_{(BD)}$	$s_{(Oy)}$	$s_{(AC)}$	$s_{(Ox)}$
$s_{(Ox)}$	$s_{(Ox)}$	$s_{(BD)}$	$s_{(Oy)}$	$s_{(AC)}$	Id_E	$r_{\pi/4}$	s_O	$r_{3\pi/4}$
$s_{(BD)}$	$s_{(BD)}$	$s_{(Oy)}$	$s_{(AC)}$	$s_{(Ox)}$	$r_{3\pi/4}$	Id_E	$r_{\pi/4}$	s_O
$s_{(Oy)}$	$s_{(Oy)}$	$s_{(AC)}$	$s_{(Ox)}$	$s_{(BD)}$	s_O	$r_{3\pi/4}$	Id_E	$r_{\pi/4}$
$s_{(AC)}$	$s_{(AC)}$	$s_{(Ox)}$	$s_{(BD)}$	$s_{(Oy)}$	$r_{\pi/4}$	s_O	$r_{3\pi/4}$	Id_E

7. **Montrer que G est engendré par deux symétries orthogonales par rapport à des droites.**

D'après la table et ce qui précède, on a vu que $G =< r, s >$ où s est déjà une symétrie orthogonale par rapport à une droite $D = (Ox)$ et r une rotation d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$

Exprimons $r = s' \circ s$ où s' est une symétrie orthogonale par rapport à une droite D'.

En effet, il suffit de prendre s' de telle sorte que l'angle entre D et D' soit égal à $\dfrac{\theta}{2}$, autrement dit $\dfrac{\pi}{4}$. : on prend donc $s' = s_{(AC)}$.

Alors $G =< s_{(Ox)}, s_{(AC)} >$

Exercice 5 : Sous-groupes finis de $Iso^+(E)$, $\dim(E) = 3$

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3, $Iso^+(E)$ le groupe des déplacements de E. Soit G un sous-groupe fini, d'ordre $n \geq 2$, de $Iso^+(E)$.

1. **Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe fini de $O^+(\overrightarrow{E})$ où $\overrightarrow{E}$ est la direction de E.**
   De même que dans l'exercice précédent, si on considère un point quelconque A, alors tout élément $g \in G$ fixe l'isobarycentre de l'orbite de ce point. On peut alors identifier application affine et partie linéaire.
   G peut donc être considéré comme un sous-groupe fini de $O^+(\overrightarrow{E})$.

   Dans la suite, on identifiera donc E à $\overrightarrow{E}$ et G sera considéré comme un sous-groupe fini de $O^+(E)$, d'ordre $n \geq 2$.
2. **Soit $\mathbb{S}_2$ la sphère unité de E. Vérifier que toute rotation $r \in O^+(E)\backslash\{Id_E\}$ fixe exactement deux points de $\mathbb{S}_2$.**
   Une rotation r de l'espace (différente de Id_E) a comme points fixes les points de son axe D. Cet axe passe par O et ne coupe la sphère unité qu'en deux points distincts.
3. **On appelle pôle de G tout point de $\mathbb{S}_2$ invariant par (au moins) une rotation de $G\backslash\{Id_E\}$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles de G. Montrer que $\mathcal{P}$ est globalement invariant sous l'action de G.**
   L'ensemble $\mathcal{P}$ est invariant par l'action d'un élément $g_0 \in G$.
   En effet, pour tout $M \in \mathcal{P}$, M est un pôle pour une certaine fonction $f \in G$.
   $$g_0 \circ f \circ g_0^{-1}(g_0(M)) = g_0 \circ f(M) = g_0(M)$$
   Ainsi $g_0(M)$ est encore un pôle pour la fonction $g_0 \circ f \circ g_0^{-1} \in G$.

4. **Soit H un groupe fini quelconque et X un ensemble (fini) sur lequel agit H. Notons k le nombre d'orbites sous cette action. Montrer la formule de Burnside**
   $$k = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} |Fix(h)|$$
   où $Fix(h) = \{x \in X \ / \ h(x) = x\}$ désigne l'ensemble des points fixes par h
   Supposons pour commencer qu'il n'y ait qu'une seule orbite.
   Notons $S = \{(h, x) \in H \times X \ / \ h(x) = x\}$.
   D'une part $|S| = \sum_{h \in H} |Fix(h)|$. D'autre part, $|S| = \sum_{x \in X} |H_x| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|X|} = |G|$.
   Supposons à présent qu'il y ait k orbites $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_k$. Alors
   $$\frac{1}{|G|} \sum_{h \in H} |Fix(h)| = \sum_{h \in H} \sum_{i=1}^{k} |Fix_{O_i}(h)| = \sum_{i=1}^{k} 1 = k$$
5. **En déduire que le nombre d'orbites pour l'action de G sur $\mathcal{P}$ est 2 ou 3.**
   On a donc d'après la question précédente,
   $$k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|$$
   L'élément $Id_E \in G$ a exactement $|\mathcal{P}|$ points fixes. Les autres éléments de G ont 2 points fixes. On a donc
   $$k = \frac{1}{n}(|\mathcal{P}| + 2(n-1))$$
   Comme on a $2 \leq |\mathcal{P}| \leq 2(n-1)$, on a
   $$2 \leq k \leq \frac{4(n-1)}{n} = 4\left(1 - \frac{1}{n}\right) < 4$$
   Ainsi $k = 2$ ou $k = 3$.

6. **Montrer que si l'action admet 2 orbites, alors G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.**

   Supposons qu'il y ait 2 orbites. Alors $|\mathcal{P}| = 2$: tous les éléments de G distincts de l'identité admettent les deux points P et P' pour pôles, ie ont donc tous le même axe D de rotation donc stabilisent tout le plan orthogonal à cet axe $D^{\perp}$.

   A toute rotation $g \in G$, on associe donc canoniquement une rotation $f(g)$ dans ce plan, ie un isomorphisme $f : G \to f(G)$. Ainsi $f(G)$ est un sous-groupe d'ordre n du groupe des rotations de $\mathbb{R}^2$ donc un groupe cyclique d'ordre n. Ainsi G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

7. **On suppose que l'action admet 3 orbites : $\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3\}$ avec $|\mathcal{P}_1| \geq |\mathcal{P}_2| \geq |\mathcal{P}_3|$. On note pour $i = 1, 2, 3$: $n_i = |G_i|$ où G_i désigne le stabilisateur d'un point de $\mathcal{P}_i$.**

   (a) **Montrer que pour tout $i = 1..3$, on a $|\mathcal{P}_i| = \dfrac{|G|}{n_i}$.**

   Soit x_0 fixé dans une orbite $\mathcal{P}_i$.
   Soit $y \in \mathcal{P}_i$ fixé. On a $y = g_0(x_0)$ pour un certain $g_0 \in G$. Etudions

   $$H = \{g \in G \ / \ g(x_0) = g_0(x_0) = y\}$$

   On a :

   $$g \in H \iff g(x_0) = g_0(x_0) \iff g_0^{-1} \circ g(x_0) = x_0 \iff g_0^{-1} \circ g \in G_{x_0} \iff g \in g_0 G_{x_0}$$

   On a clairement H en bijection avec G_{x_0}.

   On peut réaliser ceci pour tout $y \in \mathcal{P}_i$. On peut donc réaliser une relation d'équivalence sur G dont les classes d'équivalences ont toutes un cardinal égal à G_{x_0} et il y a exactement $|\mathcal{P}_i|$ orbites. On a donc :

   $$|G| = n_i |\mathcal{P}_i|$$

   (b) **Déterminer tous les triplets possibles (n_1, n_2, n_3).**

   On a $3n = |\mathcal{P}| + 2(n-1)$, on a donc $|\mathcal{P}| = n + 2$. Ainsi :

   $$n + 2 = |\mathcal{P}_1| + |\mathcal{P}_2| + |\mathcal{P}_3| = \frac{n}{n_1} + \frac{n}{n_2} + \frac{n}{n_3}$$

   Autrement dit,

   $$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1 + \frac{2}{n}$$

   On a donc $1 < \dfrac{3}{n_1}$: on a ainsi $n_1 = 2$.

   $$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{n}$$

   On a donc $\dfrac{1}{2} < \dfrac{2}{n_2}$: donc $n_2 = 2$ ou $n_2 = 3$.
   Lorsque $n_2 = 3$, on a

   $$\frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{n}$$

   donc $n_3 = 3$ ou $n_3 = 4$ ou $n_3 = 5$.

   (c) **Montrer que si $n_2 = 2$, alors on a n pair et G est isomorphe au groupe diédral $\mathbb{D}_{\frac{n}{2}}$**

   Supposons que $n_1 = n_2 = 2$. On a alors $|\mathcal{P}_3| = |\mathcal{P}| - |\mathcal{P}_1| - |\mathcal{P}_2| = n + 2 - \dfrac{n}{2} - \dfrac{n}{2} = 2$

   On note $\mathcal{P}_3 = \{P, -P\}$. Le stabilisateur G_P de P est d'ordre $\dfrac{n}{2}$. De même que dans le cas $k = 2$, on a G_P isomorphe à $\mathbb{Z}/\dfrac{n}{2}\mathbb{Z}$. Si $g \in G$ ne stabilise pas P, alors on a $g(P) = -P$ et $g(-P) = P$: donc g est un demi-tour d'ordre 2. Ainsi G est isomorphe à $\mathbb{D}_{n/2}$

(d) **Montrer que si $n_2 = n_3 = 3$, alors G est isomorphe au groupe alterné $\mathcal{A}_4$.**

Alors $n = 12$, $|\mathcal{P}_1| = 6$, $|\mathcal{P}_2| = 4$ et $|\mathcal{P}_3| = 4$.

Toute rotation $g \in G$ laisse $\mathcal{P}_2$ globalement invariant, donc induit une permutation σ_g de $\mathcal{P}_2$ et on a un morphisme $\varphi : g \mapsto \sigma_g$.

Si $g \in \text{Ker}\varphi$, alors $\sigma_g = Id$ et g fixe 4 points non alignés de $\mathbb{R}^3$: $g = Id_E$. Ainsi $\varphi(G)$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}_4$ d'ordre 12 : ainsi G est isomorphe à $\mathcal{A}_4$.

(e) **Montrer que si $n_2 = 3$ et $n_3 = 4$, alors G est isomorphe au groupe symétrique $\mathcal{S}_4$.**

On a dans ce cas $n = 24$, $|\mathcal{P}_1| = 12$, $|\mathcal{P}_2| = 8$ et $|\mathcal{P}_3| = 6$.

Soit P un point de $\mathcal{P}_i$. Le point $-P$, symétrique de P par rapport à O, a le même stabilisateur que P. Comme n_1, n_2, n_3 sont distincts, P' appartient nécessairement à l'orbite $\mathcal{P}_i$. Dans chaque orbite $\mathcal{P}_i$, on peut donc associer les points par couples de points symétriques $\pm P$.

On considère $P_1 \in \mathcal{P}_2$. On a $|G_{\mathcal{P}_1}| = n_2 = 3$. Soit $g \in G_{P_1}$ avec $g \neq Id_E$. On a $o(g) = 3$: c'est une rotation autour de l'axe $(-P_1, P_1)$ et d'angle $\pm\dfrac{2\pi}{3}$.

On considère $P_2 \in \mathcal{P}_2 \backslash \{\pm P_1\}$. Alors P_2, $P_3 = g(P_2)$, $P_4 = g^2(P_2)$ sont les sommets d'un triangle équilatéral dans un plan Π perpendiculaire à $(-P_1, P_1)$. Leurs symétriques $-P_2$, $-P_3$, $-P_4$ appartiennent au plan symétrique Π'. Les plans Π et Π' sont distincts sinon tout $g \in G$ qui laisse stable $\mathcal{P}_2 = \{\pm P_1, \pm P_2, \pm P_3, \pm P_4\}$, devrait laisser le plan Π invariant, ainsi que sa perpendiculaire $(-P_1, P_1)$. On voit que G laisserait stable $(-P_1, P_1)$, ce qui est impossible vu les cardinaux des trois orbites.

Les segments $[P_1P_2]$, $[P_1P_3]$ et $[P_1P_4]$ et leurs symétriques ont la même longueur. Et ce raisonnement s'applique également aux autres couples autres que $\pm P_1$. Les points de $\mathcal{P}_2$ sont les sommets d'un cube Γ que G laisse invariant et dont les 4 couples $\pm P_i$ constituent les grandes diagonales. Tout $g \in G$ détermine une permutation σ_g de ces 4 droites. On a donc un morphisme de groupes $\varphi : g \mapsto \sigma_g$.

Soit $g \in \text{Ker}(\varphi)$, g laisse stable la droite $(-P_i, P_i)$ pour tout $i = 1..4$. Supposons qu'il existe i tel que $g(P_i) = -P_i$. Alors g est un demi-tour par rapport à une droite Δ perpendiculaire en O à $(-P_i, P_i)$. Comme g laisse fixe deux points seulement de la sphère $\mathbb{S}_2$ et que dans $\mathcal{P}_2$ on a 8 points, nécessairement il existe deux autres couples $\pm P_k$ et $\pm P_l$ que g échange. Comme (O, P_i, P_k, P_l) est un repère affine, on a $g = s_O$. Mais ceci est impossible car s_O est un antidéplacement. Donc g laisse fixes les huit points de $\mathcal{P}_2$ et $g = Id_E$. Ainsi φ est injectif, de G dans $\mathcal{S}_4$ avec $|G| = |\mathcal{S}_4| = 24$. C'est donc un isomorphisme de G sur le groupe des déplacements qui conservent un cube Γ : c'est $\mathcal{S}_4$.

(f) **Montrer que si $n_2 = 3$ et $n_3 = 5$, alors G est isomorphe au groupe alterné $\mathcal{A}_5$.**

Dans ce cas, on a $n = 60$. On a alors $|\mathcal{P}_1| = 30$, $|\mathcal{P}_2| = 20$ et $|\mathcal{P}_3| = 12$.

Comme n_1, n_2, n_3 sont distincts, on peut comme dans le cas précédent associer les points par couples $\pm P$ dans chaque orbite.

Soit $P_1 \in \mathcal{P}_3$. On a $|G_{P_1}| = 5$. Soit $g \in G_{P_1}$ avec $g \neq Id_E$: $o(g) = 5$. C'est une rotation autour de $(-P_1, P_1)$, d'angle $\pm\dfrac{2\pi}{5}$.

On considère $P_2 \notin \{\pm P_1\}$. Alors P_2, $P_3 = g(P_2)$, $P_4 = g^2(P_2)$, $P_5 = g^3(P_2)$, $P_6 = g^4(P_2)$ sont les sommets d'un pentagone régulier dans un plan Π perpendiculaire à $(-P_1P_1)$. Leurs symétriques $P_2', \dots, P_6'$ appartiennent au plan symétrique Π'. Comme dans le cas précédent, on a $\Pi \neq \Pi'$. Comme ceci est vrai pour n'importe quel couple $\pm P_i$ de $\mathcal{P}_3$, les points de $\mathcal{P}_3$ sont les sommets d'un icosaèdre régulier Γ que G laisse invariant. Comme ce groupe est $\mathcal{A}_5$ de cardinal 60, on a $G \simeq \mathcal{A}_5$.

Exercice 6 : Groupe des similitudes

Soit E un espace affine euclidien de direction $\overrightarrow{E}$.

Une application $f : E \to E$ est appelée une similitude si f conserve les rapports de distance, c'est-à-dire il existe $k_f \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que

$$(*) \qquad \forall M, N \in E,\ \|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = k\|\overrightarrow{MN}\|$$

On note $Sim(E)$ l'ensemble des similitudes de E.

1. **Montrer que $Sim(E)$ est un sous-groupe du groupe affine $GA(E)$.**

   Soit $A \in E$ et h l'homotéhtie h_{A,k_f}. Alors $g = h^{-1} \circ f$ est une isométrie de E. Ainsi g est affine et bijective, donc $f = h \circ g \in GA(E)$.

   La relation $(*)$ montre également que $f^{-1} \in Sim(E)$ avec $k_{f^{-1}} = \dfrac{1}{k_f}$.

   Pour $f, f' \in Sim(E)$, la relation $(*)$ montre à l'évidence que $f \circ f' \in Sim(E)$ avec $k_{f \circ f'} = k_f k_{f'}$.
   Ainsi $Sim(E)$ est un sous-groupe de $GA(E)$.

2. **Montrer que les groupes $\mathcal{T}(E)$ des translations de E, $\mathcal{H}$ des homothéties-translations de E, et $Iso(E)$ des isométries de E sont des sous-groupes distingués de $Sim(E)$.**

   Le groupe des isométries est clairement un sous-groupe distingué de $Sim(E)$ puisque $Iso(E) = \mathrm{Ker}(\varphi_1)$ avec $\varphi_1 : f \mapsto k_f$ morphisme de groupes entre $Sim(E)$ et $\mathbb{R}^{+*}$.

   De même, $\mathcal{T}(E) = \mathrm{Ker}(\varphi_2)$ avec $\varphi_2 : f \mapsto \overrightarrow{f}$ morphisme de groupes entre $Sim(E)$ et $GL(\overrightarrow{E})$

   Egalement, $\mathcal{H}(E) = \varphi_2(G')$ avec $G' = \{\lambda Id_{\overrightarrow{E}}, \lambda \in \mathbb{R}^*\}$, G' est un sous-groupe distingué de $GL(\overrightarrow{E})$. Ainsi $\mathcal{H}(E)$ est un sous-groupe distingué de $Sim(E)$.

3. **Soit $f \in Sim(E)$. Supposons que f ait un unique point fixe A. Montrer qu'il existe un unique couple (g, h) où g est une isométrie et h une homothétie de rapport positif telles que $f = g \circ h = h \circ g$.**

   Soit A le point fixe de f. On pose $h = h_{A,k_f}$. Alors $g = h^{-1} \circ f$ est une isométrie de E. On a $f = h \circ g$ et A est fixe par f, g, h. Etablir que $h \circ g = g \circ h$ revient à montrer que $\overrightarrow{h} \circ \overrightarrow{g} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{h}$, ce qui est vérifié puisque $\overrightarrow{h} = k_f Id_{\overrightarrow{E}}$ est dans le centre de $GL(\overrightarrow{E})$.

   Soit $f = h' \circ g' = g' \circ h'$, une expression de f, où g' est une isométrie et où h' est une homothétie de centre A' de rapport positif. Ce rapport est nécessairement k_f.
   Comme $g' \circ h' \circ g'^{-1}$ est l'homothétie de centre $g'(A')$, de même rapport que h', le fait que $g' \circ h' \circ g'^{-1} = h'$ implique $g'(A') = A'$. Ainsi A' est fixe par h', par g' et par f. Il est donc égal à l'unique point fixe A de f. Les homothéties h et h' ont même centre et même rapport : elles sont donc égales et $g = h^{-1} \circ f$ est égale à g'.

4. **Soit $f \in Sim(E)$ tel que $k_f \neq 1$. Montrer que f admet un unique point fixe A.**

   Supposons que $k_f \neq 1$. On a $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}) = \{\overrightarrow{0}\}$. Ainsi 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$ et f a un unique point fixe A.

   Autre méthode : si $k_f < 1$, f est une contraction sur E espace complet.Donc d'après le théorème du point fixe, f admet un point fixe. Si $k_f > 1$, on applique le résultat à f^{-1}.

Exercice 7 : Expression complexe

On identifie le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormal au plan complexe.

1. **Montrer que le groupe $Iso^+(E)$ des déplacements du plan est l'ensemble des applications :**

$$f_{a,\theta} : z \longmapsto e^{i\theta}\, z + a, \qquad \textbf{avec } a \in \mathbb{C}, \theta \in [0, 2\pi[$$

Le stabilisateur Iso_O^+ de l'origine dans $Iso^+(E)$ est l'ensemble des rotations de la forme $z \mapsto e^{i\theta} z$.
Soit f un déplacement de E. Posons $O' = f(O)$ et $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OO'}$. Alors $t_{-\overrightarrow{a}} \circ f = g \in Iso_O^+$, est de la forme $z \mapsto e^{i\theta} z$ et donc $f = t_{\overrightarrow{a}} \circ g$ a pour expression $z \mapsto e^{i\theta} z + a$, avec a l'affixe de $\overrightarrow{a}$.

Réciproquement, si f a cette expression, elle est composée de la rotation $r_{O,\theta}$ et de la translation définie par a : c'est un déplacement.

2. **Montrer que le groupe $Iso^-(E)$ des antidéplacements du plan est l'ensemble des applications :**

$$g_{a,\theta} : z \longmapsto e^{i\theta}\, \overline{z} + a, \qquad \textbf{avec } a \in \mathbb{C}, \theta \in [0, 2\pi[$$

Donner l'expression canonique de $g_{a,\theta}$.
Soit $g \in Iso^-(E)$. La symétrie $s : z \mapsto \overline{z}$ est un élément de $Iso^-(E)$ donc $f = g \circ s \in Iso^+(E)$ est de la forme $z \mapsto e^{i\theta} z + a$ et $g = f \circ s$ est de la forme $z \mapsto e^{i\theta}\overline{z} + a$.

Tout antidéplacement de E est une symétrie glissée : on a $g = t_{\overrightarrow{x}} \circ s$ où s est une symétrie orthogonale qui commute avec $t_{\overrightarrow{x}}$.
On a $g \circ g = t_{2\overrightarrow{x}} \circ s^2 = t_{2\overrightarrow{x}}$. Or :

$$g(g(z)) = e^{i\theta}\overline{(e^{i\theta}\overline{z} + a)} + a = z + e^{i\theta}\overline{a} + a$$

donc $\overrightarrow{x}$ a pour affixe $\dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta}\overline{a} + a\right)$ et :

$$s(z) = (t_{-\overrightarrow{x}} \circ g)(z) = e^{i\theta}\overline{z} + a - \frac{1}{2}e^{i\theta}\overline{a} - \frac{1}{2}a = e^{i\theta}\overline{z} + \frac{1}{2}\left(a - e^{i\theta}\overline{a}\right)$$

On a $g(0) = a$ donc $\left(\frac{a}{2}\right)$ appartient à l'axe de la symétrie s. C'est un point fixe pour s (on le voit aussi dans l'expression de s) et on a donc directement l'expression de s. $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{g}$ a pour expression : $z \mapsto e^{i\theta}\overline{z}$.
L'axe de la symétrique s est la droite D passant par $A\left(\frac{a}{2}\right)$ telle que l'angle $(Ox, D) = \dfrac{\theta}{2}[\pi]$.
Puisque $s(z) - \dfrac{a}{2} = e^{i\theta}\overline{\left(z - \dfrac{a}{2}\right)}$, en plaçant l'origine en A, l'expression de s devient $Z \mapsto e^{i\theta}\overline{Z}$.

3. **Déterminer l'expression complexe des similitudes du plan.**
Soit $f \in Sim(E)$. On pose $k = k_f$. Soit h l'homothétie définie par $h : z \mapsto kz$. On a vu que $h^{-1} \circ f = g$ est une isométrie. Si f est directe, alors g est directe, d'expression $z \mapsto e^{i\theta} z + \beta$. On en déduit l'expression des similitudes directes :

$$f : z \mapsto ke^{i\theta} z + b = az + b,\ a \in \mathbb{C}^*$$

Si $a \neq 1$, $s_{a,b}$ admet un unique point fixe d'affixe $\dfrac{b}{1-a}$.

De même, les similitudes indirectes auront pour expression :

$$f : z \mapsto a\overline{z} + b,\ a \in \mathbb{C}^*$$

Pour $|a| \neq 1$, l'unique point fixe de f est aussi le point fixe de la similitude directe $f \circ f : z \mapsto a\overline{a}z + a\overline{b} + b$.
Il a pour affixe $\dfrac{a\overline{b} + b}{1 - |a|^2}$.

Exercice 8 : Inversion plane

Soit E un plan affine euclidien muni d'un $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé de E.
Soit $A \in E$ et $k \in \mathbb{R}^{+*}$. On définit $I_{A,k}$ l'inversion de pôle A et de rapport k par :

$$\forall M \in E \backslash \{A\}, \ I_{A,k}(M) = A + \frac{k}{\|\overrightarrow{AM}\|^2} \overrightarrow{AM}$$

Autrement dit, $A, M, I_{A,k}(M)$ sont alignés et $< \overrightarrow{AM} | \overrightarrow{AI_{A,k}(M)} >= k$.

On notera I l'inversion de pôle O et de rapport k.

1. **Montrer que pour tous points A, B de $E \backslash \{O\}$, on a :**

$$\|\overrightarrow{I(A)I(B)}\| = \frac{k\|\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{OA}\| \, \|\overrightarrow{OB}\|}$$

On a :

$$OA.OI(A) = OB.OI(B) = k$$

On a donc

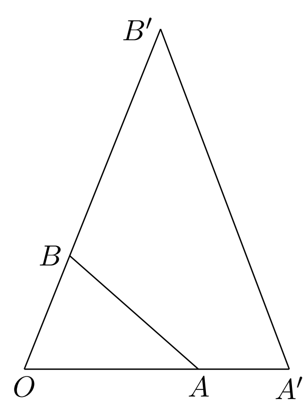
$$\frac{OA}{OB} = \frac{OI(B)}{OI(A)}$$

donc les triangles OAB et $OI(B)I(A)$ sont indirectement semblables. On a donc :

$$\frac{I(A)I(B)}{AB} = \frac{OI(A)}{OB}$$

Enfin, on a :

$$I(A)I(B) = AB.\frac{OI(A)}{OB} = \frac{AB.OA.OI(A)}{OA.OB} = \frac{kAB}{OA.OB}$$



2. **Soit $M(x, y) \in E \backslash \{O\}$. Déterminer les coordonnées du point $I(M)$.**
On note $M = (x, y)$ et $M' = I(M) = (x', y')$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y$ et :

$$< \overrightarrow{OM} | \overrightarrow{OM'} >= k \iff \lambda x^2 + \lambda y^2 = k \iff \lambda = \frac{k}{x^2 + y^2}$$

Ainsi, on a :

$$x' = \frac{kx}{x^2 + y^2}, \qquad y' = \frac{ky}{x^2 + y^2}$$

3. **En déduire l'expression complexe de l'inversion I.**
Si $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, alors z' l'affixe de $I(M)$ est :
$$z' = x' + iy' = \frac{kx + iky}{x^2 + y^2} = \frac{k}{x - iy} = \frac{k}{\overline{z}}$$

4. **Montrer que I est involutive (*i.e.* $I^2 = Id_{E\setminus\{O\}}$)** On en déduit immédiatement que
$$I(I(z)) = \frac{k}{\overline{I(z)}} = z$$
donc $I^2 = Id$ et I est bien involutive.

5. **Montrer que l'ensemble des points fixes de I est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{k}$, appelé le *cercle d'inversion* de I.**
On a pour tout point M de $E\setminus\{O\}$,
$$I(M) = M \iff \left\{ \begin{array}{l} \frac{kx}{x^2+y^2} = x \\ \frac{ky}{x^2+y^2} = y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x(x^2 + y^2 - k) = 0 \\ y(x^2 + y^2 - k) = 0 \end{array} \right. \iff x^2 + y^2 = k$$

6. **Montrer que :**
   (a) **Une droite de E est invariante par I si et seulement si elle passe par O.**
   (b) **L'image par I d'une droite ne passant pas par O est un cercle passant par O, privé de O.**
   (c) **L'image par I d'un cercle passant par O, privé de O, est une droite ne passant pas par O.**
   (d) **L'image par I d'un cercle ne passant pas par O est un cercle ne passant pas par O.**

Soit D une droite d'équation $ax+by+c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $(a, b) \neq (0, 0)$. Comme I est involutive, on a
$$I(D) : a\frac{kx}{x^2 + y^2} + b\frac{ky}{x^2 + y^2} + c = 0$$
autrement dit
$$c(x^2 + y^2) + akx + bxy = 0$$
Si $c \neq 0$, on a $O \notin D$, alors $I(D)$ est un cercle d'équation $x^2 + y^2 + \frac{ak}{c}x + \frac{bk}{c}y = 0$ qui passe par O.
Si $c = 0$, on a $O \in D$ et alors $I(D) = D$

Soit $\mathcal{C}$ un cercle d'équation $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Alors $I(\mathcal{C})$ a pour équation :
$$\left(\frac{kx}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\frac{ky}{x^2 + y^2}\right)^2 + 2a\frac{kx}{x^2 + y^2} + 2b\frac{ky}{x^2 + y^2} + c = 0$$
ce qui revient à :
$$c(x^2 + y^2) + 2akx + 2bxy + k^2 = 0$$
Si $c = 0$, on a $O \in \mathcal{C}$ et $I(\mathcal{C})$ est une droite ne passant pas par O.
Si $c \neq 0$, on a $O \notin \mathcal{C}$ et $I(\mathcal{C})$ est un cercle ne passant par O.

7. **Soient f, g deux inversions.**

(a) **Montrer que $f \circ g \circ f^{-1}$ est soit une inversion, soit une réflexion (dans le plan privé d'au plus trois points)**

On choisit une origine en le pôle de f, de sorte que dans le plan complexe, on a :

$$f : z \mapsto \frac{k}{\overline{z}}$$

Il existe $a \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que

$$g : z \mapsto a + \frac{\lambda}{\overline{z} - \overline{a}}$$

Si $a = 0$, c'est-à-dire si f et g ont le même pôle, alors $f \circ g \circ f^{-1}$ est l'inversion de pôle O et de rapport $\dfrac{k^2}{\lambda}$

Si $a \neq 0$, on a alors pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{k}{\overline{z}} \quad \text{si } z \neq 0$$

$$g \circ f(z) = a + \frac{\lambda}{\overline{(k/\overline{z})} - \overline{a}} = a + \frac{\lambda z}{k - \overline{a} z} \quad \text{si } z \neq \frac{k}{\overline{a}}$$

$$f \circ g \circ f(z) = \frac{k}{\overline{a} + \frac{\lambda \overline{z}}{k - a\overline{z}}} = \frac{k(k - a\overline{z})}{\overline{a}k + (\lambda - |a|^2)\overline{z}} \quad \text{si } z \neq \overline{\frac{ak}{|a|^2 - \lambda}}$$

Si $\lambda = |a|^2$, alors $f \circ g \circ f$ est une symétrie par rapport à une droite, c'est-à-dire une réflexion.
Si $\lambda \neq |a|^2$, alors

$$f \circ g \circ f(z) = \frac{ak}{|a|^2 - \lambda} + \frac{\frac{\lambda k^2}{(|a|^2 - \lambda)^2}}{\overline{\overline{z} - \left(\frac{ak}{|a|^2 - \lambda}\right)}}$$

Ainsi $f \circ g \circ$ est l'inversion de pôle $\dfrac{ak}{|a|^2 - \lambda}$, et de rapport $\dfrac{\lambda k^2}{(|a|^2 - \lambda)^2}$.

(b) **Dans le cas où $h = f \circ g \circ f^{-1}$ est une inversion, en notant $\mathcal{C}$ le cercle d'inversion de g, montrer que le cercle d'inversion de h est $f(\mathcal{C})$.**

On suppose que $f \circ g \circ f^{-1}$ soit une inversion, et notons $\mathcal{C}$ le cercle d'inversion de g. On a pour tout point M de E,

$$f \circ g \circ f^{-1}(M) = M \Longleftrightarrow g(f^{-1}(M)) = f^{-1}(M) \Longleftrightarrow f^{-1}(M) \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow M \in f(\mathcal{C})$$

Exercice 9 : Homographies du plan complexe complété

Soit E un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ que l'on identifiera au plan complexe $\mathcal{P}$.

La fonction complexe $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ a pour ensemble de définition $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Pour se débarasser de la contrainte $z \neq 0$, on ajoute à $\mathbb{C}$ un élément noté ∞, n'appartenant pas à $\mathbb{C}$ et on pose $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ avec les conventions : $\dfrac{1}{0} = \infty$ et $\dfrac{1}{\infty} = 0$.

On appelle plan de Gauss $\widehat{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \cup \{\Omega\}$ où $\mathcal{P}$ est le plan complexe et où Ω est un point n'appartenant pas à $\mathcal{P}$ et d'affixe ∞, appelé le point à l'infini de $\widehat{\mathcal{P}}$.

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ non tous nuls. On définit une application $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ de la manière suivante :

- $\forall z \in \mathbb{C} \ / \ cz + d \neq 0, \quad f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.
- $\forall z \in \mathbb{C} \ / \ cz + d = 0, \quad f(z) = \infty$.
- **Si** $c \neq 0$**,** $f(\infty) = \dfrac{a}{c}$**.**
- **Si** $c = 0$ **et** $a \neq 0$**,** $f(\infty) = \infty$**.**
- **Si** $a = c = 0$ **et** $d \neq 0$**,** $f(\infty) = \dfrac{b}{d}$**.**
- **Si** $a = c = d = 0$**,** $f(\infty) = \infty$**.**

1. **Montrer que f ainsi définie est une bijection de $\widehat{\mathbb{C}}$ si et seulement si $ad - bc \neq 0$.**
   On appelle une telle fonction une homographie.

   1er cas : $c = d = 0$.
   Alors, pour tout $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, $f(z) = \infty$, f est donc constante, donc non bijective.

   2ème cas : $c = 0$ et $d \neq 0$.
   Alors
   $$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} \neq \infty$$
   $$f(\infty) = \infty \text{ si } a \neq 0, \qquad f(\infty) = \frac{b}{d} \text{ si } a = 0$$
   f est donc bijective si et seulement si $\dfrac{a}{d} \neq 0$, donc si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

   3ème cas : $c \neq 0$.
   Si $z \neq -\dfrac{d}{c}$ et $z \neq \infty$,
   $$f(z) = \frac{\frac{a}{c}(cz+d) + b - \frac{ad}{c}}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2}\frac{1}{z + \frac{d}{c}}$$
   et
   $$f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty, \quad f(\infty) = \frac{a}{c}$$
   On a donc $f = s_2 \circ \sigma \circ s_1$, avec :
   $$\forall z \in \mathbb{C}, s_1(z) = z + \frac{d}{c}, \quad s_1(\infty) = \infty$$
   $$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \sigma(z) = \frac{1}{z}, \quad \sigma(0) = \infty, \quad \sigma(\infty) = 0$$
   $$\forall z \in \mathbb{C}, s_2(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2}z, \qquad s_2(\infty) = \infty$$
   Les applications s_1 et σ sont bijectives et l'application s_2 est bijective si et seulement si $bc - ad \neq 0$.

2. **Montrer que l'application réciproque d'une homographie est une homographie.**
   En effet, cela découle de la décomposition précédente $f = s_2 \circ \sigma \circ s_1$

3. **On définit un cercle de $\widehat{\mathcal{P}}$ comme un cercle de $\mathcal{P}$. Une droite de $\widehat{\mathcal{P}}$ est la réunion d'une droite de $\mathcal{P}$ et du point à l'infini Ω.**
   Montrer que l'image par une homographie d'un cercle ou une droite de $\widehat{\mathcal{P}}$ est un cercle ou une droite de $\widehat{\mathcal{P}}$.

   Il suffit de montrer le résultat pour l'application σ précédente. Soit $\mathcal{C}$ un cercle ou une droite de $\widehat{\mathcal{P}}$, qui a pour équation
   $$\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta z} + \gamma = 0$$

avec $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ si $\mathcal{C}$ est un cercle, $\alpha = 0$ si $\mathcal{C}$ est une droite.

1er cas : $\mathcal{C}$ est un cercle qui ne passe pas par O. Alors les complexes α et γ sont non nuls. On pose $z' = \dfrac{1}{z}$. L'équation précédente devient

$$\frac{\alpha}{z'\overline{z'}} + \frac{\beta}{z'} + \frac{\overline{\beta}}{\overline{z'}} + \gamma = 0$$

soit

$$\alpha + \beta\overline{z'} + \overline{\beta}z' + \gamma z'\overline{z'} = 0$$

qui est l'équation d'un cercle qui ne passe pas par O.

2ème cas : $\mathcal{C}$ est un cercle passant par O. On a $\alpha \neq 0$ et $\gamma = 0$. Si $z \neq 0$, $z' = \dfrac{1}{z}$ vérifie l'équation $\alpha + \beta\overline{z'} + \overline{\beta}z' = 0$, qui est une équation de droite. si $z = 0$, $z' = \infty$. L'image de $\mathcal{C}$ est donc une droite ne passant pas par O.

3ème cas : $\mathcal{C}$ est une droite ne passant pas par O. σ est involutive, donc l'image de $\mathcal{C}$ est un cercle passant par O.

4ème cas : $\mathcal{C}$ est une droite passant par O. On a $\alpha = \gamma = 0$. z' vérifie le système $\beta\overline{z'} + \overline{\beta}z' = 0$: c'est donc une droite passant par O.

4. **Soit f_1 et f_2 les homographies définies par**

$$f_1(z) = \frac{z-1}{z+1}, \quad f_2(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

Montrer que f_1 et f_2 envoient respectivement le demi-plan droit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \ / \ Re(z) > 0\}$ et le demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ Im(z) > 0\}$ sur le disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| < 1\}$.
Déterminer leur application réciproque.

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| < 1 \Longleftrightarrow |z-1|^2 < |z+1|^2 \Longleftrightarrow z + \overline{z} > 0 \Longleftrightarrow Re(z) > 0$$

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1 \Longleftrightarrow |z-i|^2 < |z+i|^2 \Longleftrightarrow (-2i)(z - \overline{z}) > 0 \Longleftrightarrow Im(z) > 0$$

De plus :

$$z' = \frac{z-1}{z+1} \Longleftrightarrow z'(z+1) = z-1 \Longleftrightarrow z(z'-1) = -1 - z' \Longleftrightarrow z = \frac{-z'-1}{z'-1}$$

$$z' = \frac{z-i}{z+i} \Longleftrightarrow z'(z+i) = z-i \Longleftrightarrow z(z'-1) = -i - iz' \Longleftrightarrow z = \frac{-iz'-i}{z'-1}$$

5. **Montrer que si (z_1, z_2, z_3) et (z_1', z_2', z_3') sont trois triplets d'éléments distincts de $\widehat{\mathbb{C}}$, alors il existe une et une seule homographie f telle que**

$$f(z_1) = z_1', \quad f(z_2) = z_2', \quad f(z_3) = z_3'$$

Montrons que pour tout triplet (z_1, z_2, z_3) d'éléments distints de $\widehat{\mathbb{C}}$, il existe une et une seule homographie f telle que

$$f(z_1) = 0, \ f(z_2) = 1, \ f(z_3) = \infty$$

Il suffit de prendre :

Si $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \times \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

Si $z_1 = \infty$,

$$f(z) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}$$

Si $z_2 = \infty$,

$$f(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3}$$

Si $z_3 = \infty$,

$$f(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

On a ainsi montré que l'action des homographies sur les triplets de $\widehat{\mathbb{C}}$ distincts est transitive.
Regardons le stabilisateur du triplet $(0, 1, \infty)$.
Soit $f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ tel que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(\infty) = \infty$.
On a $f(0) = \dfrac{b}{d} = 0$, donc $b = 0$.
On a $f(\infty) = \dfrac{a}{c} = \infty$, donc $c = 0$.
On a $f(1) = \dfrac{a}{d} = 1$, donc $a = d$.
Ainsi, $f(z) = z$. L'action est bien simple.
Soient $a, b, c, d \in \widehat{\mathbb{C}}$ tels que a, b, c soient distincts. Soit h_0 l'unique homographie telle que $h_0(a) = \infty$, $h_0(b) = 0$ et $h_0(c) = 1$.
On définit le birapport de a, b, c, d, noté $[a, b, c, d]$ comme la valeur $h_0(d) \in \widehat{\mathbb{C}}$.

6. **Pour tout $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, calculer $[\infty, 0, 1, z]$**
   On a montré que si f fixait le triplet $(0, 1, \infty)$, c'était $f(z) = z$.
   Donc
   $$[\infty, 0, 1, z] = z$$

7. **Montrer que le birapport est invariant par homographie, c'est-à-dire si f est une homographie, alors**
   $$[f(a), f(b), f(c), f(d)] = [a, b, c, d]$$
   (On pourra considérer l'homographie $h_0 f^{-1}$)
   Soit h_1 telle que
   $$h_1(f(a)) = \infty, \quad h_1(f(b)) = 0, \quad h_1(f(c)) = 1$$
   On a donc :
   $$[f(a), f(b), f(c), f(d)] = h_1(f(d))$$
   Mais alors $h_1 \circ f$ est une (et donc unique) homographie qui envoie a sur ∞, b sur 0 et c sur 1. On a donc
   $$[f(a), f(b), f(c), f(d)] = h_0(d) = [a, b, c, d]$$

8. **Donner une formule pour le birapport $[a, b, c, d]$**
   On a :
   $$h_0(z) = \frac{z - b}{z - a} \frac{c - a}{c - b}$$
   Donc :
   $$[a, b, c, d] = \frac{\dfrac{d - b}{d - a}}{\dfrac{c - a}{c - b}}$$

Exercice 10 : Puissance d'un point par rapport à un cercle

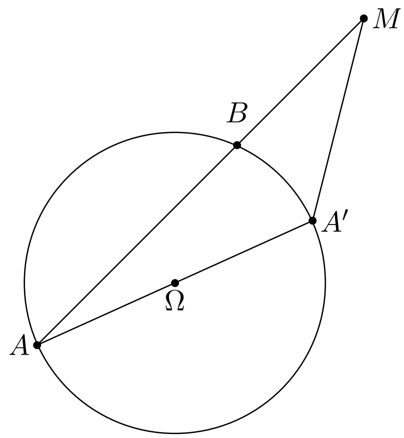
Soit E un plan affine euclidien. Soit $\Omega \in E$ et $R \geq 0$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω et de rayon R.

1. **Soit $M \in E$. Soit D une droite passant par M et intersectant le cercle en deux points A et B (éventuellement confondus). On note A' le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à A. Montrer que :**

$$<\overrightarrow{MA}|\overrightarrow{MB}>=<\overrightarrow{MA}|\overrightarrow{MA'}>=\|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 - R^2$$

En particulier, cette valeur ne dépend pas de la droite D choisie. On appelle puissance de M par rapport au cercle $\mathcal{C}$ le réel :

$$\mathcal{C}(M) =<\overrightarrow{MA}|\overrightarrow{MB}>$$

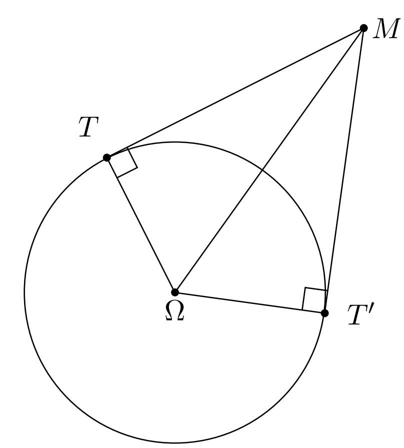


On a :

$$<\overrightarrow{MA}|\overrightarrow{MB}>=<\overrightarrow{MA}\Big|\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{A'B}>=<\overrightarrow{MA}\Big|\overrightarrow{MA'}>=<\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega A}\Big|\overrightarrow{M\Omega}-\overrightarrow{\Omega A}>=\|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 - R^2$$

2. **Soit $M \in E$ un point extérieur à $\mathcal{C}$. Soient T et T' les points de contact des tangents à $\mathcal{C}$ issues de M. Montrer que**

$$\mathcal{C}(M) = \|\overrightarrow{MT}\|^2 = \|\overrightarrow{MT'}\|^2$$



On a qu'à appliquer Pythagore :

$$\Omega M^2 = MT^2 + \Omega T^2$$

3. **Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de E, on note :**

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

Montrer que pour tout point $M(x_0, y_0) \in E$, on a :

$$\mathcal{C}(M) = x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + c$$

Puisque $\Omega(a, b)$ et $R^2 = a^2 + b^2 - c$, on a :

$$\mathcal{C}(M) = \Omega M^2 - R^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 - (a^2 + b^2 - c) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c$$

4. **Soient A, B, C, D quatre points de E non alignés 3 à 3, et tels que (AB) ne soit pas parallèle à (CD). Notons $M = (AB) \cap (CD)$. Montrer que A, B, C, D, sont cocycliques si et seulement si**

$$< \overrightarrow{MA} | \overrightarrow{MB} > = < \overrightarrow{MC} | \overrightarrow{MD} >$$

Directement, si A,B,C,D sont cocycliques, alors

$$< \overrightarrow{MA} | \overrightarrow{MB} > = \mathcal{C}(M) = < \overrightarrow{MC} | \overrightarrow{MD} >$$

Réciproquement, supposons que $< \overrightarrow{MA} | \overrightarrow{MB} > = < \overrightarrow{MC} | \overrightarrow{MD} >$. Notons D' le point d'intersection de $(\mathcal{C}$ et (MC). On a :

$$< \overrightarrow{MC} | \overrightarrow{MD} > = < \overrightarrow{MA} | \overrightarrow{MB} > = \mathcal{C}(M) = < \overrightarrow{MC} | \overrightarrow{MD'} >$$

d'où $D' = D$ car $M \neq C$.

5. **Soient A, B, C trois points de E non alignés. Soit $M \in (AB)$. Montrer que le cercle circonscrit à ABC est tangent à (MC) si et seulement si**

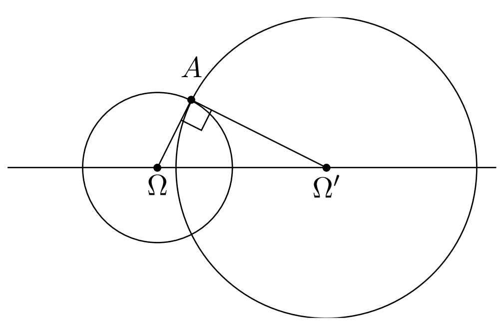
$$< \overrightarrow{MA} | \overrightarrow{MB} > = \|\overrightarrow{MC}\|^2$$

Même raisonnement que la question précédente.

6. **On dit que deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont orthogonaux et on note $\mathcal{C} \perp \mathcal{C}'$ si et seulement s'ils sont sécants en deux points distincts, notés A et B, et que les tangentes en A à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont orthogonales.**

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon R, $\mathcal{C}'$ un cercle de centre Ω' et de rayon R'. Montrer que :

$$\mathcal{C} \perp \mathcal{C}' \iff R^2 + R'^2 = \|\overrightarrow{\Omega\Omega'}\|^2 \iff \mathcal{C}(\Omega') = R'^2 \iff \mathcal{C}'(\Omega) = R^2$$



On utilise Pythagore dans le triangle $\Omega\Omega' A$. et $\mathcal{C}(\Omega') = \Omega\Omega'^2 - R^2$, et $\mathcal{C}'(\Omega) = \Omega'\Omega^2 - R'^2$.

7. **On considère les équations de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$:**

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \quad \mathcal{C}' : x'^2 + y'^2 - 2ax' - 2by' + c' = 0$$

Montrer que

$$\mathcal{C} \perp \mathcal{C}' \iff 2aa' + 2bb' = c + c'$$

Comme $\Omega = (a, b)$, $\Omega' = (a', b')$, $R^2 = a^2 + b^2 - c$, $R'^2 = a'^2 + b'^2 - c'$, on a :

$$R^2 + R'^2 - \Omega\Omega'^2 = 2aa' + 2bb' - c - c'$$

Exercice 11 : Axe radical de deux cercles, Centre radical de trois cercles

Soit E un espace affine euclidien de dimension 2. On garde les notations de l'exercice 9 concernant $\mathcal{C}(M)$ la puissance d'un point M par rapport à un cercle $\mathcal{C}$.

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de E de centres $\Omega \neq \Omega'$.

1. **Montrer que l'ensemble**

$$\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'} = \{M \in E \ / \ \mathcal{C}(M) = \mathcal{C}'(M)\}$$

est une droite de E. On l'appelle axe radical de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

On note I le milieu de $[\Omega\Omega']$. On a, pour tout point M de E,

$$M \in \Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'} \iff \Omega M^2 - R^2 = \Omega' M^2 - R'^2 \iff \Omega M^2 - \Omega' M^2 = R^2 - R'^2$$

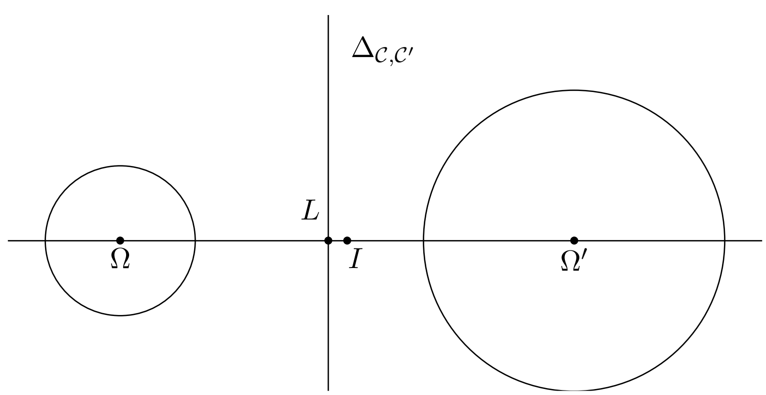
Mais

$$\Omega M^2 - \Omega' M^2 = (\overrightarrow{\Omega I} + \overrightarrow{IM})^2 - (\overrightarrow{\Omega' I} + \overrightarrow{IM})^2 = 2 < \overrightarrow{\Omega\Omega'} | \overrightarrow{IM} >$$

Ainsi, on a :

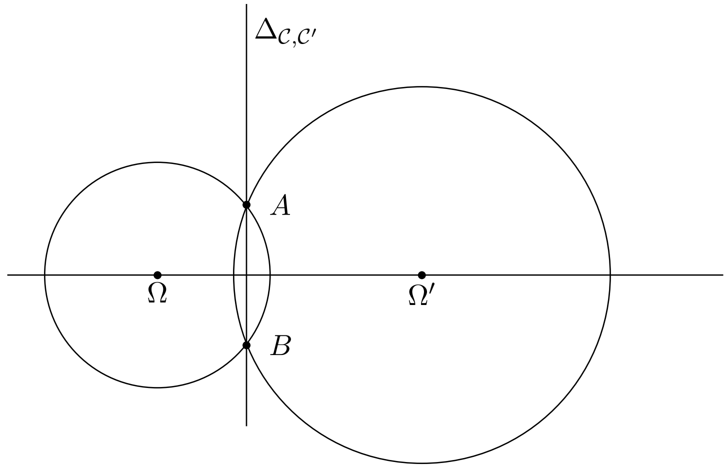
$$M \in \Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'} \iff 2 < \overrightarrow{\Omega\Omega'} | \overrightarrow{IM} > = R^2 - R'^2$$

Donc $\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ est une droite, perpendiculaire à $(\Omega\Omega')$ en un point $L \in (\Omega\Omega')$ tel que $\overline{IL} = \dfrac{R^2 - R'^2}{2\overline{\Omega\Omega'}}$



2. **Montrer que $\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'} \perp (\Omega\Omega')$.**
On l'a vu à la question précédente.

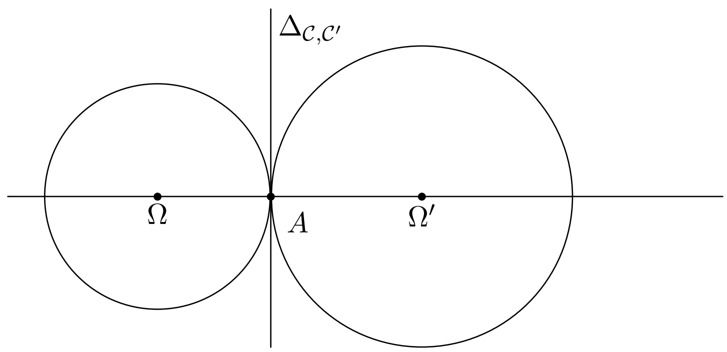
3. **On suppose que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{A, B\}$ avec $A \neq B$. Montrer que $\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'} = (AB)$.**



On a

$$\left\{\begin{array}{l}\mathcal{C}(A)=\mathcal{C}'(A)=0\\ \mathcal{C}(B)=\mathcal{C}'(B)=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}A\in\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}\\ B\in\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}\end{array}\right. \iff \Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}=(AB)$$

4. **On suppose que $\mathcal{C}\cap\mathcal{C}'=\{A\}$. Montrer que $\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ est la tangente commune aux cercles en A.**



5. **On se place dans un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. On donne les équations :**

$$\mathcal{C}: x^2+y^2-2ax-2by+c=0,\quad \mathcal{C}': x'^2+y'^2-2ax'-2by'+c'=0$$

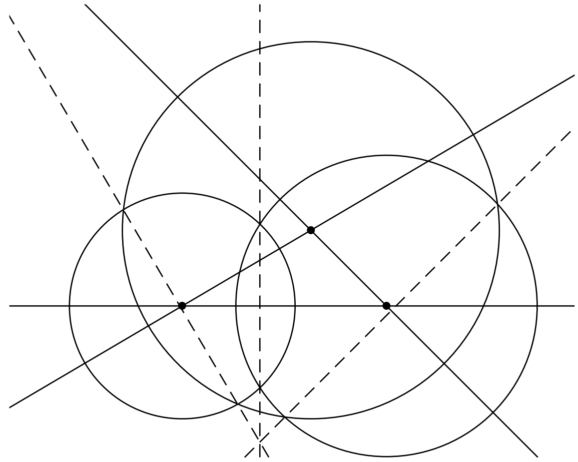
Montrer que la droite $\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ a pour équation :

$$2(a'-a)x+2(b'-b)y+(c-c')=0$$

Soit $M(x,y)\in E$. On a :

$$M\in\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}\iff x^2+y^2-2ax-2by+c=x^2+y^2-2a'x-2b'y+c'\iff 2(a'-a)x+2(b'-b)y+(c-c')=0$$

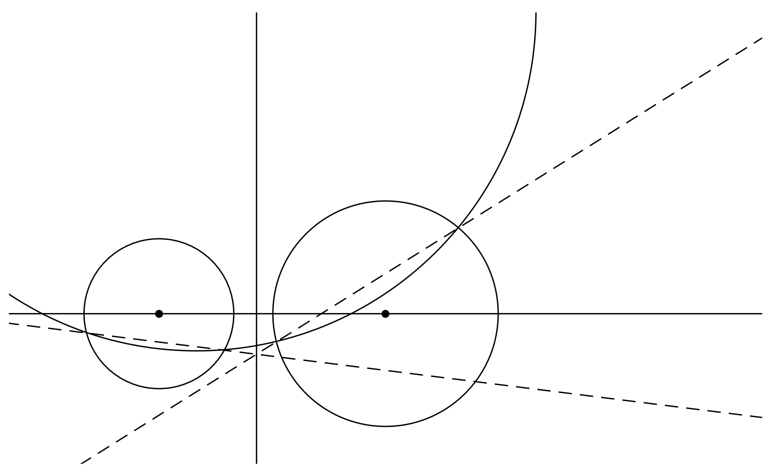
6. **Soient $\mathcal{C}$,$\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$ trois cercles de centres Ω,Ω',Ω'' non alignés.**
   (a) **Montrer que les trois axes radicaux $\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$, $\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}''}$ et $\Delta_{\mathcal{C}',\mathcal{C}''}$ sont concourants en un point γ, que l'on appelle centre radical de $\mathcal{C},\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$.**



Comme $\Omega, \Omega', \Omega''$ sont non alignés, les axes radicaux $\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ et $\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}''}$ sont sécants en un point noté γ. On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}(\gamma) = \mathcal{C}'(\gamma) \\ \mathcal{C}(\gamma) = \mathcal{C}''(\gamma) \end{array} \right. \Longrightarrow \mathcal{C}'(\gamma) = \mathcal{C}''(\gamma) \Longrightarrow \gamma \in \Delta_{\mathcal{C}',\mathcal{C}''}$$

(b) **On suppose que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \emptyset$. Construire $\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ en utilisant un cercle $\mathcal{C}''$ sécant à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.**
Il existe un cercle $\mathcal{C}''$ sécant à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{C}'$. Le centre radical γ de $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$ est le point d'intersection des axes radicaux $\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}''}$ et $\Delta_{\mathcal{C}',\mathcal{C}''}$.
L'axe radical $\Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ est alors la perpendiculaire à $(\Omega\Omega')$ passant par γ.



(c) **Montrer que si $\mathcal{C}$,$\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ sont 2 à 2 orthogonaux, alors leur centre radical est l'orthocentre du triangle $\Omega\Omega'\Omega''$.**

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}'' \perp \mathcal{C} \\ \mathcal{C}'' \perp \mathcal{C}' \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}(\Omega'') = R''^2 \\ \mathcal{C}'(\Omega'') = R''^2 \end{array} \right. \Longrightarrow \mathcal{C}(\Omega'') = \mathcal{C}'(\Omega'') \Longrightarrow \Omega'' \in \Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'} \Longrightarrow (\gamma\Omega'') \perp (\Omega\Omega')$$

Exercice 12 : Faisceaux linéaires de cercles

Soit E un espace affine euclidien de dimension 2. On considère deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de E de centres Ω et Ω'

- **Si $\Omega \neq \Omega'$, on appelle faisceau linéaire de cercles défini par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ l'ensemble des cercles Γ tels que $\Delta_{\mathcal{C},\Gamma} = \Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$.**
- **Si $\Omega = \Omega'$, on appelle faisceau linéaire de cercles défini par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ l'ensemble des cercles Γ de centre Ω.**

On note dans les deux cas $\mathcal{F}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ le faisceau linéaire de cercles défini par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

1. **Montrer que si $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{A, B\}$ avec $A \neq B$, alors $\mathcal{F}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ est l'ensemble des cercles passant par A et B. Les points A et B sont appelés les points de base du faisceau $\mathcal{F}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$.**
2. **Montrer que si $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{T\}$, alors $\mathcal{F}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ est l'ensemble des cercles tangents en T à $\mathcal{C}$ (et à $\mathcal{C}'$).**
3. **On suppose que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \emptyset$. On note $H = (\Omega\Omega') \cap \Delta_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ et I et J les points de la droite $(\Omega\Omega')$ définis par :**
$$\|\overrightarrow{HI}\|^2 = \|\overrightarrow{HJ}\|^2 = \mathcal{C}(H) = \mathcal{C}'(H)$$
Montrer que $\mathcal{F}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ est l'ensemble des cercles centrés sur $(\Omega\Omega')$ et orthogonaux au cercle de diamètre $[IJ]$.
Les points I et J sont appelés les points limites du faisceau $\mathcal{F}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$.
Montrer que les seuls cercles de rayon nul de $\mathcal{F}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ sont $\{I\}$ et $\{J\}$.
4. **On munit E d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On donne les équations**
$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \quad \mathcal{C}' : x'^2 + y'^2 - 2ax' - 2by' + c' = 0$$
Montrer que $\mathcal{F}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ est l'ensemble des cercles d'équations :
$$\alpha(x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c) + \beta(x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c') = 0 \quad \textbf{où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha + \beta \neq 0$$
5. **Soit $\Gamma \in \mathcal{F}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ un cercle de centre ω et de rayon ρ. Montrer que**
$$\rho^2 \|\overrightarrow{\Omega\Omega'}\| + R^2 \|\overrightarrow{\Omega'\omega}\| + R'^2 \|\overrightarrow{\omega\Omega}\| + \|\overrightarrow{\Omega\Omega'}\| \, \|\overrightarrow{\Omega'\Omega}\| \, \|\overrightarrow{\omega\Omega}\| = 0$$