Géométrie élémentaire : corrigé de l'épreuve du 7 janvier 2009.

Exercice I.

Partie A

1) Tout demi-tour r vérifie $r^2 = Id$. Dès lors $r_1 \circ r_2 = Id$ équivaut à $r_1 = r_2$. On aurait $D_1 = D_2$. Impossible puisque ces droites ne sont pas parallèles.

2) On sait que D est orthogonale aux deux droites D_1 et D_2. Dès lors pour $m \in D$, on a

$$\begin{aligned} r_1 \circ r_2(m) &= r_1 \circ r_2(a_2 + \overrightarrow{a_2m}) = r_1(a_2 - \overrightarrow{a_2m}) \\ &= r_1(a_1 + \overrightarrow{a_1a_2} - \overrightarrow{a_2m}) = a_1 - \overrightarrow{a_1a_2} + \overrightarrow{a_2m} \\ &= m + \overrightarrow{ma_1} + \overrightarrow{a_2m} - \overrightarrow{a_1a_2} = m - 2\overrightarrow{a_1a_2}. \end{aligned}$$

Conclusion : $\overrightarrow{m(r_1 \circ r_2)(m)} = 2\overrightarrow{a_2a_1}$.

3) Posons $\rho = \tau_{-2\overrightarrow{a_2a_1}} \circ r_1 \circ r_2 \in Is^+(\mathbf{R}^3)$. $\rho \neq Id$ puisque $L_\rho = L_{r_1 \circ r_2} \neq Id$. Par 2) $\rho(m) = m$ pour $m \in D$.
Dès lors ρ est une rotation d'axe D et

$$r_1 \circ r_2 = \tau_{2\overrightarrow{a_2a_1}} \circ \rho.$$

De plus $\overrightarrow{a_2a_1} \in \overrightarrow{D}$. Dès lors la translation et la rotation commutent et $r_1 \circ r_2$ est bien un vissage d'axe D.

4) Par le théorème de décomposition d'une isométrie vu en cours, on sait que $r_1 \circ r_2$ admet un point fixe ssi le vecteur de la translation τ est nul.
Dès lors $r_1 \circ r_2$ demi-tour implique $a_1 = a_2$ et les droites sont sécantes. Le reste a été fait en TD : il suffit de montrer que si $(\vec{e}_1 \mid \vec{e}_2) = cos\,\alpha$ alors ρ est une rotation d'angle 2α.

Pour la réciproque, observer que si $a_1 = a_2$, $r_1 \circ r_2$ est une rotation d'axe D dont l'angle (par ce qui précède) est π puisque $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Partie B :

1) Ceci a été fait en TD : Choisir un point m et soit i le plus petit entier tel que $f^i(m) \in \{m, f(m), \dots, f^{i-1}(m)\} = P_i$. La partie finie P_i est $f-$ stable. Dès lors son isobarycentre est un point fixe de f.

2) a) Pour $m \in D$ un calcul analogue au 2) de la partie A donne

$$r(m) = a_1 - \overrightarrow{a_1a_2} + \overrightarrow{a_2a_3} - \overrightarrow{a_3m}$$

et montre que $r(D) = D$. De plus si $\vec{e}$ dirige D on a $L_r(\vec{e}) = (-1)^3\vec{e}$. Dès lors par le rappel r est un demi-tour.

b) Si $\vec{\epsilon}$ dirige Δ on a $(\vec{e} \mid \vec{\epsilon}) = 0$ par orthogonalité des sous-espaces propres pour $+1$ et -1. Pour obtenir le point d'intersection z de D et Δ, on peut utiliser le 1) : puisque $r^2 = Id$, le milieu du segment $[m, r(m)]$ est fixe et appartient donc à l'axe Δ. En prenant $m = a_3$ il vient $z = a_3 + \overrightarrow{a_2a_1}$.
Voici une autre réponse : puisque l'ensemble des points fixes de r est son axe Δ, tout point $m \in D$ vérifiant $r(m) = m$ appartient aussi à Δ. L'expression explicite de $r(m)$ conduit alors à l'unique point d'intersection z.

3) On a $r = r_1 \circ r_2 \circ r_3$ ou ce qui est équivalent $r \circ r_3 = r_1 \circ r_2$. Si D_3 et Δ étaient parallèles on aurait $L_{r \circ r_3} = L_{r_1 \circ r_2} = Id$ et D_1 serait parallèle à D_2.

4) Par la partie A, on sait que $r_1 \circ r_2$ est un vissage d'axe D et $r \circ r_3$ est un vissage d'axe D'. Puisqu'ils sont égaux, $D = D'$. Voici la conclusion : pour trois droites D_i en position générale la composée des trois demi-tours r_i est un demi-tour ssi les droites D_i admettent une perpendiculaire commune.

4) La droite D d'équation paramétrique $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + u, \frac{1}{2} - u)$, $u \in \mathbf{R}$ est une perpendiculaire commune aux trois droites de la figure. Par la conclusion qui précède la composée $r_1 \circ r_2 \circ r_3$ est un demi-tour.

Les points d'intersection $D \cap D_i$ sont respectivement $a_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, $a_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $a_3 = (\frac{1}{2}, 1, 0)$ d'où l'on tire en se servant de la question 2 b) que l'axe Δ du demi-tour passe par le point $a_3 + a_1 - a_2 = (\frac{1}{2}, 0, 1)$. Pour obtenir la direction de l'axe il reste à déterminer la direction propre de valeur propre $+1$ de la composée $L_{r_1} \circ L_{r_2} \circ L_{r_3}$ ce qui nécessite l'écriture explicite des trois matrices L_{r_i} dans la base canonique. Je vous laisse ceci.

5) Si f est un demi-tour, toute droite D'' coupant son axe orthogonalement vérifie la condition. Reste à montrer la réciproque : puisque Det $L_f = 1$, $L_f \in O_3^+$ admet la valeur propre $+1$. Par hypothèse L_f admet aussi la valeur propre -1 (nécessairement de multiplicité 2). Par le cours on sait que $f = t_{\vec{u}} \circ \overline{f} = \overline{f} \circ t_{\vec{u}}$ où $\vec{u} \in Ker(L_f - id)$ et $\overline{f}$ est ici un demi-tour. Il suffit donc de vérifier que $\vec{u} = \vec{0}$. Or $f^2 = t_{2\vec{u}}$ et $f^2(D'') = D''$ dès lors $\vec{u}$ doit appartenir à l'intersection $\overrightarrow{D''} \cap Ker(L_f - id)$ qui est nulle puisque les vecteurs propres de L_f de valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Exercice II

1) a) C'est le nombre de partie de cardinal $i+1$ dans un ensemble de cardinal $n+1$: $\binom{n+1}{i+1}$.

b) Oui : convexe $\Rightarrow$ connexe par arcs.

c) $s-a+f=2$ c'est un cas particulier du théorème d'Euler pour les polytopes.

2)

$$\begin{array}{rcl}\big(d(x,p)\big)^2 & = & (\overrightarrow{px} \mid \overrightarrow{px}) \\ & = & (\overrightarrow{pm}+\overrightarrow{mx}) \mid \overrightarrow{pm}+\overrightarrow{mx})\end{array}$$

En développant, l'égalité $(d(x,p))^2 = (d(x,q))^2$ s'écrit

$$(\overrightarrow{pm} \mid \overrightarrow{mx}) = (\overrightarrow{qm} \mid \overrightarrow{mx})$$

i.e.

$$(\overrightarrow{pq} \mid \overrightarrow{mx}) = 0.$$

3) a) Soit $m_i = z_0 + \frac{1}{2}\overrightarrow{z_0z_i}$ le point milieu du segment $[z_0, z_i]$, $1 \le i \le n$. On a

$$x \in P_i \Leftrightarrow (\overrightarrow{m_ix} \mid \overrightarrow{z_0z_i}) = 0, \quad 1 \le i \le n.$$

Par Chasles,

$$\overrightarrow{z_0x} = \overrightarrow{z_0m_i} + \overrightarrow{m_ix} = \frac{1}{2}\overrightarrow{z_0z_i} + \overrightarrow{m_ix}$$

il vient

$$0 = (\overrightarrow{m_ix} \mid \overrightarrow{z_0z_i}) = (\overrightarrow{z_0x} - \frac{1}{2}\overrightarrow{z_0z_i} \mid \overrightarrow{z_0z_i}) = (\overrightarrow{z_0x} \mid \overrightarrow{z_0z_i}) - \frac{l^2}{2}.$$

b) Soit $z = z_0 + \sum_{i=1}^n c_i\overrightarrow{z_0z_i}$. $z \in P_i$ pour tout $1 \le i \le n$ ssi

$$\begin{array}{rcl} c_1 l^2 + c_2\frac{l^2}{2} + \cdots + c_n\frac{l^2}{2} & = & \frac{l^2}{2} \\ \cdots & = & \frac{l^2}{2} \\ c_1\frac{l^2}{2} + \cdots + c_{n-1}\frac{l^2}{2} + c_n l^2 & = & \frac{l^2}{2}\end{array}$$

dont l'unique solution (obtenue par soustraction des équations $(i)-(i+1)$) est

$$c_i = \frac{1}{n+1}, \quad 1 \le i \le n$$

i.e. le point z est l'isobarycentre de Σ.

c) La sphère de centre z et de rayon $r_n = d(z, z_0)$ contient Σ. Par ailleurs, si une sphère passe par les points $z_0, z_1, \ldots, z_n$, l'unicité de la solution du système montre que son centre doit être z. Cette sphère est donc unique.

d) Il faut calculer $r_n = d(z, z_0)$. On a

$$r_n^2 = (\overrightarrow{z_0z} \mid \overrightarrow{z_0z}) = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{i,j}(\overrightarrow{z_0z_i} \mid \overrightarrow{z_0z_j})$$

En séparant $i=j$ de $i \neq j$ dans cette double somme il vient

$$r_n = l\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$$

et dès lors $lim_{n\to\infty} r_n = \frac{l}{\sqrt{2}}$.

4) a) h existe et est unique puisque Σ est une base affine. Il suffit de vérifier que $L_h \in O(E)$. Par bilinéarité du produit scalaire, il suffit de vérifier que

$$(L_h(\overrightarrow{z_0z_i}) \mid L_h(\overrightarrow{z_0z_j})) = (\overrightarrow{z_0z_i} \mid \overrightarrow{z_0z_j})$$

pour tout (i,j). C'est immédiat puisque $L_h(\overrightarrow{z_0z_i}) = \overrightarrow{h(z_0)h(z_i)} = \overrightarrow{z_0'z_i'}$ et les produits scalaires dépendent uniquement de l.

b) Toute bijection affine préserve les barycentres ; en particulier h envoie le centre de $\mathcal{S}$ sur le centre de $\mathcal{S}'$. Quant au rayon il ne dépend pas du simplexe mais seulement de n et de l.