Université LYON 1
L3 Mathématiques

Géométrie élémentaire
Epreuve du 7 janvier 2009
Durée : 3 heures

Les documents et les calculettes ne sont pas autorisés.

Exercice I.

On se place dans l'espace affine $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire $(\,|\,)$ et de la distance euclidienne d usuels.

On appelle *perpendiculaire commune* à une famille de droites affines $(D_i)_{1\leq i\leq m}$ de $\mathbf{R}^3$ toute droite affine $D \subset \mathbf{R}^3$ coupant chaque droite D_i, $1 \leq i \leq m$, orthogonalement.

Pour un point $z \in \mathbf{R}^3$ et un vecteur $\vec{e} \in \mathbf{R}^3$, on appelle rotation d'axe $D = z+ < \vec{e} >$ toute isométrie $f \in Is^+(\mathbf{R}^3) \setminus \{Id\}$ de la forme $f(m) = z + \rho(\overrightarrow{zm})$ où $\rho \in O^+(\mathbf{R}^3)$ est telle que $\rho(\vec{e}) = \vec{e}$. Une rotation d'angle π est appelée un demi-tour.

Partie A

Soient D_1 et D_2 deux droites affines non parallèles de vecteurs directeurs unitaires respectifs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$. On rappelle (et on ne demande pas de redémontrer) que la paire (D_1, D_2) admet une unique perpendiculaire commune D. On pose $\{a_1\} = D \cap D_1$, $\{a_2\} = D \cap D_2$ et on désigne par r_1 et r_2 les demi-tours d'axes respectifs D_1 et D_2.

1) Montrer que $r_1 \circ r_2 \neq Id$.

2) Calculer $\overrightarrow{m\,(r_1 \circ r_2)(m)}$ pour $m \in D$.

3) Montrer que $r_1 \circ r_2$ est un vissage, i.e.

$$r_1 \circ r_2 = \tau \circ f = f \circ \tau$$

où f est une rotation dont on déterminera l'axe et τ une translation dont on déterminera le vecteur. (*On veillera à justifier chaque affirmation.*)

4) Déduire que $r_1 \circ r_2$ est un demi-tour si et seulement si $a_1 = a_2$ et $(\vec{e}_1 \mid \vec{e}_2) = 0$.
(On pourra éventuellement utiliser un résultat de cours portant sur les isométries.)

Partie B

Soient D_1, D_2, D_3 trois droites affines de $\mathbf{R}^3$ telles que $D_i \cap D_j = \emptyset$ pour $i \neq j$.

Dans cette partie on se propose d'étudier la composée $r = r_1 \circ r_2 \circ r_3$ de trois demi-tours r_1, r_2, r_3 d'axes respectifs D_1, D_2, D_3. On pourra utiliser sans démonstration la propriété suivante :
$(\star)$ $f \in Is^+\mathbf{R}^3$ est un demi-tour si et seulement si il existe une droite D'' de vecteur directeur $\vec{e}''$ telle que $f(D'') = D''$ et $L_f(\vec{e}'') = -\vec{e}''$.

1) Soit f une application affine de $\mathbf{R}^3$. On suppose qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $f^k(m) = m$ pour tout $m \in \mathbf{R}^3$. Montrer que f admet un point fixe.

2) On suppose qu'il existe une perpendiculaire commune D à la famille (D_1, D_2, D_3). On note $\{a_i\} = D \cap D_i, 1 \leq i \leq 3$.

a) Calculer $r(m)$ pour $m \in D$. En déduire que $r(D) = D$ et ensuite que $r = r_1 \circ r_2 \circ r_3$ est un demi-tour.

b) Montrer que l'axe Δ du demi-tour r coupe D orthogonalement en un point $a \in D$ que l'on déterminera en fonction des points a_1, a_2, a_3.

3) On se propose à présent de montrer une réciproque de la question 2). On suppose que $r = r_1 \circ r_2 \circ r_3$ est un demi-tour d'axe Δ et que D_1 n'est pas parallèle à D_2.

a) Montrer que D_3 et Δ ne sont pas parallèles.

b) Soit D la perpendiculaire commune à (D_1, D_2) et D' la perpendiculaire commune à (D_3, Δ).

Montrer que $D = D'$. Que peut-on en conclure sur la composée de trois demi-tours ?

4) On considère le cube unité C porté par le repère canonique $(\vec{0}; (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$ de $\mathbf{R}^3$ et les trois droites D_1, D_2, D_3 de la figure suivante :

La composée $r = r_1 \circ r_2 \circ r_3$ est-elle un demi-tour ? Dans l'affirmative, déterminer l'axe Δ de r.

5) Faire la preuve de la propriété $(\star)$ énoncée au début de la Partie B.

Exercice II.

On se place dans l' espace affine euclidien $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$ muni du produit scalaire $\big(\mid \big)$ et de la distance associée d usuels.

Soit un réel $l > 0$. On appelle $n-$ simplexe régulier de côté l toute partie

$$\Sigma = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\} \subset \mathbf{R}^n$$

telle que

$$\big(\overrightarrow{z_i z_j} \mid \overrightarrow{z_i z_j}\big) = l^2,\ \forall i \neq j, 0 \leq i \leq n,\ 0 \leq j \leq n.$$

On peut montrer (et on ne demande pas de le faire ici) que pour $0 < i < j \leq n$, on a $\big(\overrightarrow{z_0 z_i} \mid \overrightarrow{z_0 z_j}\big) = \frac{l^2}{2}$ et que $(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ est une base affine de $\mathbf{R}^n$.

La première question est indépendante du reste de l'exercice.

1) Soit $[z_0, z_1, \ldots, z_n]$ l'enveloppe convexe du $n-$ simplexe $\Sigma = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$. Pour $0 \leq i \leq n-1$, appelons $i-$ face de $[z_0, z_1, \ldots, z_n]$ l'enveloppe convexe de toute famille de $i+1$ sommets choisis parmi $z_0, \cdots, z_n$.

a) Combien y-a-t-il de $i-$ faces ?

b) Une $i-$ face est-elle connexe par arcs ?

c) Pour $n = 3$, soient f le nombre de $2-$ faces, a le nombre de $1-$ faces et s le nombre de $0-$ faces de $[z_0, z_1, z_2, z_3]$. Calculer l'entier $s - a + f$. Ceci vous rappelle-t'il un énoncé général ?

2) Soient p et q deux points distincts de $\mathbf{R}^n$ et m le point milieu du segment $[p, q]$. Montrer que l'ensemble des points x de $\mathbf{R}^n$ qui sont équidistants de p et de q (i.e. tels que $d(x,p) = d(x,q)$) est l' hyperplan affine $m + < \overrightarrow{pq} >^{\perp} \subset \mathbf{R}^n$.

Cet hyperplan est appelé l' *hyperplan médiateur* de p et q.

Pour un $n-$simplexe régulier $\Sigma = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ de côté l, on désigne par P_i l'hyperplan médiateur des points z_0 et z_i, $1 \leq i \leq n$.

3)

a) Montrer que

$$x \in P_i \Leftrightarrow \big(\overrightarrow{z_0 x} \mid \overrightarrow{z_0 z_i}\big) = \frac{l^2}{2},\ 1 \leq i \leq n.$$

b) Montrer, en déterminant ses coordonnées dans le repère affine $(z_0; \overrightarrow{z_0 z_1}, \ldots, \overrightarrow{z_0 z_n})$ à l'aide de la question a), qu'il existe un unique point $z \in \mathbf{R}^n$ (que l'on identifiera) tel que $z \in P_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

c) En déduire qu'il existe une unique sphère $\mathcal{S} \subset \mathbf{R}^n$ telle que $\Sigma \subset \mathcal{S}$.

La sphère $\mathcal{S}$ est appelée la *sphère circonscrite* au $n-$ simplexe Σ.

d) Calculer le rayon r_n de la sphère $\mathcal{S} \subset \mathbf{R}^n$ et ensuite $\lim_{n \to \infty} r_n$.

4) Soient $\Sigma = \{z_0, \ldots, z_n\}$ et $\Sigma' = \{z'_0, \ldots, z'_n\}$ deux $n-$ simplexes réguliers de côté l de sphères circonscrites respectives $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$.

a) Montrer qu'il existe une unique bijection affine $h : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ telle que $h(z_i) = z'_i$ pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Montrer ensuite que h est une isométrie de $\mathbf{R}^n$.

(On demande une argumentation complète.)

b) Montrer que si h est une bijection affine de $\mathbf{R}^n$ telle que $h(\Sigma) \subset \Sigma'$, alors $h(\mathcal{S}) = \mathcal{S}'$.