Le Problème de Napoléon : Comment trouver le centre d'un cercle à l'aide du compas seul.

Voici les étapes d'une construction possible :

i) Choisir deux points A et E sur le cercle C et tracer le cercle Γ de centre A passant par E. Ce cercle coupe C en E et en un second point F.

ii) Les cercles de centre E et F passant par A se coupent en A et en un second point G.

iii) Le cercle C' de centre G passant par A coupe Γ aux points H et K.

iv) Les cercles de centre H et K passant par A se coupent en A et un second point O'.

Proposition : Le point O' coincide avec le centre O du cercle C.

Démonstration : Par construction, on a $EG = AE = AF = FG$ et $OE = OF$. Les points A, G et O sont donc alignés (sur la médiatrice (AG) de $[EF]$), et la droite $(AG) = (AO)$ est un axe de symétrie de la figure. Comme le quadrilatère $AEGF$ est un losange, ses diagonales $[AG]$ et $[EF]$ sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu, noté I.

De même, on a $AH = AK = O'H = O'K$ et $GH = GK$, donc la droite $(AG) = (AO')$ est la médiatrice du segment $[HK]$ et le quadrilatère $AHO'K$ est un donc losange, dont on note I' le milieu des diagonales.

Les cercles C et C' sont par construction tangents en A et du même côté par rapport à leur tangente commune en A. Les points I et I', qui sont intérieurs à C et C' respectivement, sont donc en fait sur la demi-droite $[A, O)$, et il suffit, pour montrer que $O = O'$, de montrer que $AI' = \frac{AO}{2} = \frac{R_C}{2}$, où l'on note R_D le rayon d'un cercle D.

Cela résultera des formules $AI = \frac{R_\Gamma^2}{2R_C}$ et $AI' = \frac{R_\Gamma^2}{2R_{C'}}$. En effet, puisque I est milieu de $[A, G]$, on a aussi $AI = \frac{R_{C'}}{2}$, d' où $R_\Gamma^2 = R_C R_{C'}$ et $\frac{R_C}{2} = \frac{R_\Gamma}{2R_{C'}} = AI'$ et le résultat. On peut obtenir ces formules avec la notion d'axe radical de deux cercles, ou directement par applications du théorème de Pythagore :

1) Axe radical de deux cercles :

Rappel: l'axe radical de deux cercles est l'ensemble des points ayant même puissance par rapport aux deux cercles. Si c et c' sont les centres et R et R' les rayons de ces cercles, l'axe radical est l'ensemble des points M tels que $2(\overrightarrow{cc'} \mid \overrightarrow{cM}) = R^2 - R'^2 + (\overrightarrow{cc'} \mid \overrightarrow{cc'})$.

Les points E et F sont sur les cercles Γ et C (i.e. ont une puissance 0 par rapport à ces cercles), donc l'axe radical de Γ et C est la droite (EF). On voit de même que l'axe radical de Γ et C' est la droite (HK). Puisque I est sur (EF) et I' sur (HK), on obtient $2R_C \cdot AI = 2AO \cdot AI = 2(\overrightarrow{AO} \mid \overrightarrow{AI}) = R_\Gamma^2$ et, de même, $2R_{C'} AI' = R_\Gamma^2$.

2) Par Pythagore :

En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles (rectangles) AIE et GIE, on obtient $IE^2 = R_\Gamma^2 - AI^2 = R_C^2 - OI^2$. Et comme $OI = R_C - AI$, on en déduit que $R_\Gamma^2 = 2R_C \cdot AI$. De même, en considérant les triangles $AI'H$ et $GI'H$, on obtient $R_\Gamma^2 = 2R_{C'} \cdot AI'$.

Une application de la formule d'Euler : $s - a + f = 2$ (cf Audin par exemple)

Peut-on utiliser uniquement des hexagones pour couvrir une sphère (aucune hypothèse n'étant faite sur la régularité des hexagones et le nombre d'aretes attachées à chaque sommet) ?

Réponse: non.

Démonstration : Supposons le contraire et considérons un tel recouvrement. Chaque hexagone a 6 arètes et chaque arète appartient à deux hexagones, donc $2a = 6f$. La formule d'Euler donne alors $3s = 6 + 2a$, mais puisque le nombre a_s d'arètes attachées à chaque sommet est supérieur à 3, on a $3s \leq \sum_s a_s = 2a$ (puisque chaque arète a deux sommets), d'où une contradiction.