

# Géométrie Élémentaire

Serge Parmentier

Automne 2007

## CHAPITRE I

*L'algèbre n'est qu'une géométrie écrite.  
La géométrie n'est qu'une algèbre figurée.*

Sophie Germain

### 1- Préliminaires sur Groupes et Opérations

La notion de groupe apparaît dans des contextes mathématiques très divers. En géométrie, elle se manifeste sous la forme suivante (écrite ici sous forme encore imprécise):

*Les transformations naturelles d'un espace  $X$  forment un groupe pour la composition.*

Je rappelle ici les définitions:

#### **Groupe**

Un groupe est un ensemble  $G$  muni d'une Loi de Composition Interne (LCI):

$$\star : G \times G \longrightarrow G : (g, h) \mapsto g \star h$$

- associative:  $\forall g, h, k \in G, (g \star h) \star k = g \star (h \star k)$
- à neutre:  $\exists e \in G, \forall g \in G, e \star g = g \star e = g$
- à réciproque:  $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G, g \star g^{-1} = g^{-1} \star g = e.$

$G$  est dit commutatif ou abélien si  $\forall g, h \in G, g \star h = h \star g.$

#### **Sous-groupe**

Une partie  $H \subset G$  est un sous-groupe si

- (1)  $e \in H,$
- (2)  $\forall h, k \in H, h \star k \in H,$
- (3)  $\forall h \in H, h^{-1} \in H.$

On dit que le sous-groupe  $H \subset G$  est distingué si  $\forall h \in H, \forall g \in G, g \star h \star g^{-1} \in H.$

**Morphisme de groupes** Soient  $(G, \star), (G', \star')$  deux groupes de neutres respectifs  $e$  et  $e'$ . Une application  $\sigma : G \rightarrow G'$  est un morphisme de groupes si

$$\sigma(g \star g') = \sigma(g) \star' \sigma(g'), \quad \forall g, g' \in G.$$

Pour tout morphisme  $\sigma$  on a  $\sigma(e) = e', \sigma(x^{-1}) = (\sigma(x))^{-1}.$

Le noyau  $\text{Ker}(\sigma) := \{g \in G, \sigma(g) = e'\}$  est un sous-groupe distingué de  $G$ . L'image  $\text{Im}(\sigma) \subset G'$  est un sous-groupe.

On a (vérifiez!): le morphisme  $\sigma$  est injectif si et seulement si  $\text{Ker} \sigma = \{e\}$ .

*Notations:* Très souvent on omet  $\star$  dans les écritures, i.e. on écrit simplement  $gg'$  au lieu de  $g \star g'$ .

Voici quelques exemples naturels de groupes:

### Exemples de groupes

(1)  $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$  pour l'addition.

(2)  $\mathbf{Q}^* \subset \mathbf{R}^* \subset \mathbf{C}^*$  pour la multiplication. (Ici  $X^*$  signifie  $X \setminus \{0\}$ .)

(3) Si  $S^1 = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$  est le cercle unité de  $\mathbf{C}$  et  $C_n = \{z \in \mathbf{C}, z^n = 1\}$  est l'ensemble des racines  $n$ -ièmes de 1, alors  $C_n \subset S^1 \subset \mathbf{C}^*$  sont des groupes pour la multiplication. On peut montrer (cf TD) que tout sous groupe multiplicatif fini de  $\mathbf{C}^*$  de cardinal  $n$  est nécessairement l'ensemble des racines  $n$ -ièmes de l'unité.

- *Intermezzo sur les racines  $n$ -ième de l'unité: points du plan constructibles à la règle et au compas, construction des polygones réguliers -*

Lorsque  $n \geq 3$ , l'ensemble  $C_n = \{\exp(2\pi ik/n), 1 \leq k \leq n-1\}$  est l'ensemble des sommets d'un polygone régulier à  $n$  côtés.

*Question:* Les sommets de ces polygones sont-ils constructibles à la règle et au compas à partir de deux points-base  $O$  et  $I$  du plan (affine)?

Tout d'abord une définition naturelle:

*Points constructibles:* Soient deux points  $O$  et  $I$  du plan (affine). On dit qu'un point du plan est constructible à la règle et au compas à partir de  $O$  et  $I$  s'il est le point d'intersection de deux droites, de deux cercles, d'une droite et d'un cercle, obtenus à partir des points  $O$  et  $I$  en un nombre fini de tracés, la règle étant la suivante: on peut tracer toute droite passant par deux points déjà construits et tout cercle de centre un point construit et de rayon la distance entre deux points construits.

Pour  $n = 3, 4$  la solution est élémentaire:

Pour  $n = 5$ , il s'agit de construire sur le cercle unité un point d'abscisse  $\cos \frac{2\pi}{5}$ .

On pose  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ . Des identités

$$\begin{aligned}1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 &= 0 \\ \omega^4 = \bar{\omega}, \quad \omega^3 &= \bar{\omega}^2\end{aligned}$$

on déduit

$$\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}, \quad \cos\frac{2\pi}{5} \times \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{4}.$$

$\cos\frac{2\pi}{5}$  est donc la racine positive de  $x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} = 0$ , i.e.

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Voici les étapes de la construction:

Pour  $n = 6$ , il s'agit de dupliquer le cas  $n = 3$  comme suit:

Quant à  $n = 7$ , la réponse est surprenante: *On ne peut pas construire le polygone régulier à sept côtés à la règle et au compas à partir des points  $O$  et  $I$ .*

L'origine est une étude générale due à F. Gauss (1801) qui fait la liste des polygones constructibles à la règle et au compas et dont le premier exclu est le cas  $n = 7$ .

Pour une présentation limpide et les preuves (qui relèvent de la théorie des corps (cf M1)) voici une très belle référence

- Théorie des Corps *La règle et le compas* par Jean-Claude Carrega. Edition Hermann.

On y trouvera aussi la preuve que l'ensemble  $C$  des nombres constructibles (sur l'axe des abscisses) est un sous-corps du corps des réels qui est stable par racine carrée (i.e. tel que  $\forall r \in C, \sqrt{r} \in C$ ).

Retour aux exemples de groupes.

(4) - Si  $X$  est un ensemble, l'ensemble  $\mathcal{S}_X$  des bijections de  $X$  est un groupe pour la composition des applications.

Si  $X$  est fini de cardinal  $n$ ,  $\mathcal{S}_X$  est un groupe fini de cardinal  $n!$  appelé le groupe des permutations de  $X$ . Le groupe des permutations  $\sigma$  de l'ensemble  $I_n := \{1, 2, \dots, n\}$  est toujours noté  $\mathcal{S}_n$  et l'on écrit souvent une permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

(5) Si  $P \subset X$ , on dit que la bijection  $f$  de  $X$  laisse  $P$  stable si  $f(P) = P$  (i.e. si quel que soit  $x \in P, f(x) \in P$  et  $f^{-1}(x) \in P$ ).

Le sous-ensemble  $G_P$  des bijections de  $X$  qui laissent  $P$  stable est un sous-groupe de  $\mathcal{S}_X$ .

(6) Si  $V$  est un espace vectoriel, l'ensemble  $Gl(V)$  des bijections linéaires de  $V$  est un groupe pour la composition.

(7) Si  $V$  est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire  $(|)$ , l'ensemble  $O(V)$  des bijections linéaires préservant le produit scalaire (i.e.  $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V, (f(\vec{v}) | f(\vec{w})) = (\vec{v} | \vec{w})$ ) est un sous-groupe de  $Gl(V)$  appelé le groupe orthogonal de  $(V, (|))$ .

### Exemples de morphismes

(1) L'exponentielle  $(\mathbf{R}, +) \rightarrow (\mathbf{R}^*, \times) : t \mapsto \exp t$  satisfait

$$\exp(t + t') = \exp(t) \exp(t'), \quad \exp(t) = 1 \Rightarrow t = 0.$$

C'est donc un morphisme injectif de groupes.

(2) l'exponentielle  $(\mathbf{R}, +) \rightarrow (S_1, \times) : t \mapsto \exp it = \cos t + i \sin t$  est un morphisme surjectif de noyau  $2\pi\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$ .

(3) l'exponentielle  $(\mathbf{R}^2, +) \mapsto (\mathbf{C}^*, \times) : (x, y) \mapsto \exp x (\cos y + i \sin y)$  est un morphisme surjectif de noyau  $\{0\} \times 2\pi\mathbf{Z}$ .

(4) L'application

$$Gl(V) \rightarrow Gl_{dim V} \mathbf{R} : f \mapsto [f, B, B]$$

qui à toute bijection linéaire  $f$  de l'espace réel  $V$  associe sa matrice  $[f, B, B]$  dans une base  $B$  de  $V$  est un morphisme bijectif (i.e. un *isomorphisme*) de  $(Gl(V), \circ)$  dans le groupe  $Gl_{dim V} \mathbf{R}$  des matrices carrées de taille  $dim V$  de déterminant non nul.

(5) L'application déterminant  $Det : Gl(V) \rightarrow \mathbf{R}$  qui à toute bijection linéaire  $f$  de l'espace réel  $V$  associe son déterminant  $Det(f)$  est un morphisme dont le noyau

$$Ker(Det) = \{f \in Gl(V) \mid Det(f) = 1\}$$

est noté  $Sl(V)$  ( $S$  pour groupe linéaire *spécial*).

(6) Soit  $X$  un ensemble,  $P \subset X$  et  $G_P \subset \mathcal{S}_X$  le sous-groupe des bijections de  $X$  qui laissent  $P$  stable. L'application de restriction

$$G_P \rightarrow \mathcal{S}_P : f \mapsto f|_P$$

est un morphisme de groupes.

Que peut-on extraire de ces exemples?

Une première chose: un groupe peut être défini de façon abstraite et être étudié en tant que tel. Par exemple c'est l'objet de certains chapitres d'ATN. Mais on peut le voir aussi comme une collection de transformations bijectives d'un ensemble. Cette seconde manière de voir, plus intuitive et géométrique, conduit à la notion d'opération (ou d'action).

(En pratique, les deux points de vue sont toujours intimement liés.)

**Définition (Opération)** (ou action)

Soit  $X$  un ensemble et  $G$  un groupe de neutre  $e$ . On dit que  $G$  opère (à gauche) sur  $X$  s'il existe une application  $\phi : G \times X \rightarrow X : (g, x) \mapsto \phi_g(x)$  vérifiant

$$- \forall x \in X, \phi_e(x) = x$$

$$- \forall g, h \in G, \forall x \in X, \phi_{g \star h}(x) = \phi_g \circ \phi_h(x)$$

**Propriétés:**

(1) Pour chaque  $g \in G$  fixé, l'application  $X \rightarrow X : x \mapsto \phi_g(x)$  est une bijection de  $X$  de réciproque  $x \mapsto \phi_{g^{-1}}(x)$ .

$$\text{Démonstration: } \phi_{g^{-1}} \circ \phi_g = \phi_{g^{-1} \star g} = \phi_e = Id_X.$$

(2) La donnée d'une opération  $\phi$  équivaut à la donnée d'un morphisme de groupes

$$G \rightarrow \mathcal{S}_X : g \mapsto \phi_g.$$

**Exemples d'opérations:**

(1)  $Gl_2\mathbf{R}$  opère sur  $\mathbf{R}^2$ , par multiplication matricielle:

$$\phi : Gl_2\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 : (A, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(2) Tout sous groupe  $H \subset G$  d'un groupe  $G$  opère sur  $G$  de trois manières naturelles:

$$\begin{aligned} H \times G &\rightarrow G : (h, g) \mapsto h \star g, & H \times G &\rightarrow G : (h, g) \mapsto g \star h^{-1}, \\ H \times G &\mapsto G : (h, g) \mapsto h \star g \star h^{-1}. \end{aligned}$$

(3)

(a) En particulier  $\mathbf{C}^*$  opère sur lui même par multiplication complexe

$$\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^* \rightarrow \mathbf{C}^* : (z, z') \mapsto zz',$$

(b) le cercle unité  $S^1$  opère sur  $\mathbf{C}^*$  par

$$S^1 \times \mathbf{C}^* \rightarrow \mathbf{C}^* : (z, z') \mapsto zz',$$

(c) le groupe  $C_n$  des racines  $n$ -ièmes de 1 opère sur  $S^1$  par

$$C_n \times S^1 \rightarrow S^1 : (\epsilon, z) \mapsto \epsilon z.$$

(4)

(a) Le groupe  $\mathcal{S}_n$  des permutations de  $\{1, \dots, n\}$  opère sur toute partie  $P = \{x_1, \dots, x_n\}$  d'un ensemble par

$$\phi : \mathcal{S}_n \times P \rightarrow P : (\sigma, x_i) \mapsto x_{\sigma(i)}.$$

(b) Le groupe  $\mathcal{S}_n$  opère aussi sur  $\mathbf{R}^n$  par permutations des composantes

$$\mathcal{S}_n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n : (\sigma, (x_1, x_2, \dots, x_n)) \mapsto (x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}).$$

(5) Le groupe  $Sl_2\mathbf{R} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbf{R}, ad - bc = 1 \right\}$  opère sur le demi-plan complexe  $\mathbf{P} := \{z \in \mathbf{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$  par homographies:

$$\phi : Sl_2\mathbf{R} \times \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} : \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

(6) (Groupe affine de la droite)

Comme dans l'exemple (1), le sous-groupe  $GA := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0 \right\} \subset Gl_2\mathbf{R}$  opère sur  $\mathbf{R}^2$  par multiplication matricielle:

$$\phi : GA \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ y \end{pmatrix}.$$

Pour cette opération, la droite affine  $D$  d'équation  $y = 1$  est globalement invariante:

$$\forall A \in GA, \forall \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in D, \text{ on a } \phi_A \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in D.$$

Par restriction à  $D \simeq \mathbf{R}$  (l'identification étant  $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto x$ ) on obtient une opération

$$GA \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} : \left( \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \right) \mapsto ax + b$$

du groupe  $GA$  par *transformations affines* de  $\mathbf{R}$ .

### Orbites:

Si  $G$  opère sur  $X$  par  $\phi$ , la partie  $\mathcal{O}_x = \{\phi_g(x), g \in G\}$  s'appelle l'orbite du point  $x \in X$ . C'est l'ensemble des points de  $X$  que l'on peut atteindre à partir du point  $x$  à l'aide des bijections  $\phi_g, g \in G$ .

La relation sur  $X, x \sim y$  ssi il existe  $g \in G$  tel que  $y = \phi_g(x)$  est une relation d'équivalence dont les classes sont les orbites distinctes de  $X$ .

$X$  est donc réunion disjointes d'orbites.

*Démo:* Réflexivité:  $x \sim x$  puisque  $x = \phi_e(x)$ .

Symétrie:  $x \sim y$  signifie  $y = \phi_g(x)$  pour un certain  $g \in G$ .

Dès lors  $\phi_{g^{-1}}(y) = \phi_{g^{-1}}(\phi_g(x)) = \phi_{g^{-1} \star g}(x) = \phi_e(x) = x$  i.e.  $y \sim x$ .

Transitivité: Si  $y = \phi_g(x)$  et  $z = \phi_h(y)$ , on a  $z = \phi_h \circ \phi_g(x) = \phi_{h \star g}(x)$  i.e.  $x \sim z$ .

### Transitivité

On dit que l'opération  $\phi$  est transitive si  $X$  est une orbite. Ce qui s'exprime par la phrase: Quel que soit  $(x, y) \in X^2$  il existe  $g \in G$  tel que  $y = \phi_g(x)$ .

### Exemples d'orbites

(1) Pour l'opération (1), il y a deux orbites:  $\{(0, 0)\}$  et  $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

*Description:* Soit  $(x = R \cos \theta, y = R \sin \theta) \neq (0, 0)$ . On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

i.e. la composition de l'homothétie (de centre  $(0,0)$  et de rapport  $R$ ) et de la rotation d'angle  $\theta$  envoie  $(1,0)$  sur  $(x,y)$ .  $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  est donc l'orbite de  $(1,0)$  (et dès lors l'orbite de chacun de ses points).

(2) Pour l'opération (3 b), l'orbite de  $z \in \mathbf{C}^*$  est le cercle centré en 0 et de rayon  $|z|$ .

(3) Pour l'opération (3 c), l'orbite d'un point  $z \in S^1$  est constituée des  $n$  sommets  $z, e^{i2\pi/n}z, \dots, e^{i2\pi(n-1)/n}z$  d'un  $n$ -gone régulier.

*Description pour  $n = 3$ :*

(4) Pour l'opération (4 a), il n'y a qu'une seule orbite (i.e. l'opération est transitive).

*Description:* Soit  $\sigma = t_{1j}$  la transposition définie par  $t_{1j}(1) = j$ ,  $t_{1j}(j) = 1$  et  $t_{1j}(k) = k$  si  $k \neq 1$  et  $k \neq j$ . On a  $\phi_{t_{1j}}(x_1) = x_j$ , i.e. tout point est dans l'orbite de  $x_1$ .

(5) Pour l'opération par homographies, il n'y a qu'une seule orbite.

*Description:* Observer que si  $x + iy \in \mathbf{P}$  on a  $y > 0$  et

$$\phi \left( \begin{array}{cc} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{array} \right) (i) = x + iy.$$

(6) Pour l'opération de  $GA$  par transformations affines de  $\mathbf{R}$  il n'y a qu'une seule orbite: en effet, tout réel  $r$  s'écrit  $r = a \times 0 + r$ .

### Stabilisateur d'un point

L'ensemble  $G_x = \{g \in G, \phi_g(x) = x\} \subset G$  est un sous-groupe (vérifier) de  $G$  appelé stabilisateur (ou sous-groupe d'isotropie) de  $x \in X$ .

**Simplicité** L'opération est dite simple (ou libre) si  $\forall x \in X, G_x = \{e\}$ .

**Propriété:**  $\phi$  est à la fois transitive et simple si et seulement si quel que soit  $(x, x') \in X^2$  il existe un unique  $g \in G$  tel que  $x' = \phi_g(x)$ .

*Démo:* Si  $\phi$  est transitive  $g$  existe. Montrons qu'il est unique. On a  $\phi_g(x) = \phi_{g'}(x) \Leftrightarrow \phi_{g^{-1} \circ \phi_{g'}}(x) = x \Leftrightarrow \phi_{g^{-1} \star g'}(x) = x \Leftrightarrow g^{-1} \star g' \in G_x \Leftrightarrow g = g'$  puisque  $G_x = \{e\}$ .

Réciproquement, puisque  $g$  existe, l'opération est transitive. On sait que quelquesoit  $x \in X, \phi_e(x) = x$ . L'unicité pour  $x' = x$  implique  $G_x = \{e\}$ .

## 2- La notion d'espace affine.

Les questions les plus simples de géométrie plane sont formulées en termes de points, de droites ( éventuellement de cercles), et de leurs points d'intersection.

Voici un exemple de tels énoncés:

On se donne deux droites  $D$  et  $D'$  sécantes en un point  $O$  et un point  $C$ . On demande de construire la droite passant par  $O$  et  $C$  sans utiliser  $O$ .

*Une solution: tracer deux droites parallèles  $(AA')$  et  $(BB')$ , ensuite les droites  $(AC)$ ,  $(A'C)$  et les droites parallèles  $d'$  et  $d''$ . Ces dernières se coupent au point  $C'$ . Un théorème de Desargues (pour une démo à l'aide des homothéties-translations, cf TD) assure que la droite  $(CC')$  passe par  $O$ .*

Dans ce type de construction tous les points, toutes les droites du plan  $\mathbf{R}^2$  ont le même statut, seule importe la position relative des points, des droites. Deux points  $A, A'$  du plan sont reliés par une translation unique de vecteur  $\overrightarrow{AA'}$ . Translater le point  $A$  par  $\vec{u}$  et ensuite par  $\vec{v}$  revient à translater  $A$  par  $\vec{u} + \vec{v}$ . L'unique droite  $(AA')$  passant par  $A$  et  $A'$  s'obtient en translantant  $A$  (ou  $A'$ ) par les vecteurs  $t\overrightarrow{AA'}$ ,  $t \in \mathbf{R}$ .

Remarquer que dans cette description, on adopte deux points de vue distincts sur le plan  $\mathbf{R}^2$ . D'une part un point de vue ensembliste: c'est une collection de points  $A = (a, a')$ ,  $B = (b, b')$ ... et d'autre part un point de vue vectoriel: c'est un espace vectoriel dont les éléments sont notés  $\overrightarrow{AB} = (b - a, b' - a')$ ,  $\vec{u}, \vec{v}, \dots$ . Le second opère sur le premier par translations des points. Cette opération est *transitive et simple*. C'est le point de vue *affine*.

Un espace affine est un ensemble où l'on peut translater les points à l'aide de vecteurs avec des propriétés en tous points analogues à celle de  $\mathbf{R}^d$ .

Voici la définition abstraite:

### Espace affine

Soit  $(V, +_V, \cdot_V)$  un espace vectoriel de dimension  $d$  sur un corps commutatif  $\mathbf{k}$  et  $X$  un ensemble.

On dit que  $X$  est un espace affine de direction  $V$  si le groupe commutatif  $(V, +_V)$  opère de façon transitive et simple sur  $X$ , i.e. s'il existe une application

$$\tau : V \times X \rightarrow X : (\vec{v}, x) \mapsto \tau_{\vec{v}}(x)$$

telle que

$$\text{A1- } \tau_{\vec{0}}(x) = x, \forall x \in X$$

$$\text{A2- } \forall \vec{u}, \vec{v} \in V, x \in X, \tau_{\vec{u} +_V \vec{v}}(x) = (\tau_{\vec{u}} \circ \tau_{\vec{v}})(x).$$

$$\text{A3 - } \forall (x, y) \in X^2 \text{ il existe un et un seul } \vec{u} \in V \text{ tel que } y = \tau_{\vec{u}}(x).$$

Les transformations  $\tau_{\vec{u}}$  sont appelées les *translations* de  $X$ .

Si  $X$  est affine de direction  $V$ , on pose  $\dim X = \dim V = d$ .

### Notation:

La plupart des auteurs écrivent

$$\tau_{\vec{v}}(x) = x + \vec{v}.$$

$$\text{A1 s'écrit } x = x + \vec{0} \text{ et A2 s'écrit } x + (\vec{u} +_V \vec{v}) = (x + \vec{u}) + \vec{v}.$$

L'unique  $\vec{v} \in V$  vérifiant  $y = x + \vec{v}$  est noté  $\overrightarrow{xy}$ .

La condition A2 implique la relation de Chasles

$$\overrightarrow{xz} = \overrightarrow{xy} +_V \overrightarrow{yz}$$

pour tout  $x, y, z \in X$ .

Pour la suite, on écrira toujours  $\vec{u} + \vec{v}$  au lieu de  $\vec{u} +_V \vec{v}$ .

### Exemples:

(1) Tout espace vectoriel  $V$  est affine de direction  $V$  en posant  $\tau_{\vec{u}}(\vec{v}) = \vec{u} + \vec{v}$ .

(2) Soit  $P$  l'ensemble des droites vectorielles de l'espace  $\mathbf{R}^2$  moins l'axe des abscisses. Toute droite  $D$  de  $P$  intersecte la droite d'équation  $y = 1$  en un seul point (cf figure).

$P$  est affine de direction  $\mathbf{R}$  pour l'opération

$$\tau : \mathbf{R} \times P \rightarrow P : (r, (a, 1)) \mapsto (a + r, 1)$$

qui a la droite d'intersection  $(a, 1)$  avec la droite d'équation  $y = 1$  associe la droite d'intersection  $(a + r, 1)$  avec  $y = 1$ .

*Caveat:* L'ensemble de toutes les droites vectorielles de  $\mathbf{R}^2$  (la droite d'équation  $y = 0$  incluse) s'appelle l'espace *projectif*. Cet espace n'est pas un espace affine (voir la fin de ce chapitre pour une description plus explicite).

La définition d'une *structure affine* en termes de *translations* peut sembler quelque peu *opaque*.

Ce qui suit devrait dissiper cette impression: le choix d'un point *origine* permet d'identifier  $X$  à sa direction  $V$ ; ensuite, le choix d'une base de  $V$  permet de l'identifier à  $\mathbf{k}^d$ .

*Choix d'une origine.*

Fixer un point  $o \in X$  et localiser les points  $m \in X$  à partir de  $o$ : Tout point  $m \in X$  s'écrit  $m = o + \overrightarrow{om}$  pour un unique  $\overrightarrow{om} \in V$ . L'application

$$X \rightarrow V : m \mapsto \overrightarrow{om}$$

est une bijection de réciproque  $\vec{v} \mapsto o + \vec{v}$ .

*Choix d'un repère affine.*

On appelle repère affine tout couple  $(o; B)$  où  $o \in X$  et  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_d)$  est une base de la direction  $V$ .

Tout point  $m \in X$  s'écrit

$$m = o + \overrightarrow{om} = o + \sum_{i=1}^d x_i \vec{b}_i$$

pour d'uniques  $x_1, \dots, x_d \in \mathbf{k}$  appelés coordonnées du point  $m$  dans le repère  $(o, B)$ . L'application

$$X \rightarrow \mathbf{k}^d : m \mapsto (x_1, \dots, x_d)$$

est dès lors une bijection identifiant  $X$  à  $\mathbf{k}^d$ .

Il est souvent utile, par exemple pour comparer des observations, de savoir changer de repères.

*Exo:* Soit  $(o; B)$  et  $(o'; B')$  deux repères de l'espace affine  $(X, V)$ . Soit  $m \in X$ . Exprimer les coordonnées  $(x'_1, \dots, x'_d)$  de  $m$  dans  $(o'; B')$  en fonction des coordonnées  $(x_1, \dots, x_d)$  de  $m$  dans  $(o; B)$ .

Les questions de géométrie élémentaire sont formulées en termes de sous-ensembles particuliers d'un espace affine  $(X, V)$ : les points, les droites, et en général les sous-espaces affines de  $X$ .

### Sous-espaces affines

*Intuitivement* tracer une droite  $D$  du plan revient à choisir un *point*  $a$  du plan, une *direction*  $\mathbf{D}$  et ensuite à *translater*  $a$  dans la direction  $\mathbf{D}$ .

C'est exactement la définition d'un sous-espace affine:

On dit que la partie  $A \subset X$  est un sous-espace affine de  $X$  s'il existe  $a \in A$  et un sous-espace vectoriel  $W \subset V$  tel que

$$A = a + W = \{a + \vec{w}, \vec{w} \in W\}$$

$W$  est appelé la direction de  $A$ .

*Remarque:* Du point de vue *abstrait*,  $A$  est donc l'orbite du point  $a$  pour l'opération par translation du sous-groupe  $W \subset V$  sur  $X$ . En particulier, pour tout point  $b \in A$ ,  $A = b + W$ .

### Exemples:

(1) Quel que soit  $x \in X$ ,  $\{x\}$  est un sous-espace affine de direction  $\{\vec{0}\}$ . *Les points sont les sous-espaces élémentaires.*

(2) Si  $\mathbf{k}\vec{u} \subset V$  est une droite vectorielle ( $\vec{u} \neq \vec{0}$ ) et  $p \in X$  le sous-espace  $D = p + \mathbf{k}\vec{u}$  est l'unique droite de direction  $\mathbf{k}\vec{u}$  passant par  $p$ .

(3) Plus généralement, si  $W \subset V$  est un sous-espace de dimension  $m$  le sous-espace affine  $p + W$  est l'unique  $m$ -plan affine de  $X$  passant par  $p$  et de direction  $W$ . Si  $m = \dim X - 1$  on dit que  $p + W$  est un hyperplan affine.

*Sous-espaces affines de  $\mathbf{R}^3$ : points, droites, et plans*

(4) Soient  $V$  et  $V'$  deux espaces vectoriels,  $l : V \rightarrow V'$  une application linéaire et  $\vec{b} \in V'$ . L'ensemble des solutions de l'équation  $l(\vec{x}) = \vec{b}$ , s'il n'est pas vide, est un sous-espace affine de  $V$  de direction  $\text{Ker } l \subset V$ .

*Nous verrons plus loin que tous les sous-espaces affines de  $V$  sont de ce type.*

(5) ( Equations différentielles linéaires à coefficients constants)

On désigne par  $C_R^\infty$  l'espace vectoriel réel des applications indéfiniment dérivables de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ . Soient  $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbf{R}$  et  $\psi \in C_R^\infty$ . L'ensemble des solutions  $\phi \in C_R^\infty$  de l'équation

$$a_0\phi(x) + a_1\frac{d}{dx}\phi(x) + \dots + a_m\frac{d^m}{dx^m}\phi(x) = \psi(x)$$

est un sous-espace affine de dimension  $m$  de  $C_R^\infty$ .

Le caractère affine est un cas particulier de l'exemple (4) puisque l'opérateur  $l = a_0 + a_1\frac{d}{dx} + \dots + a_m\frac{d^m}{dx^m}$  est un endomorphisme de  $C_R^\infty$ . La dimension  $m$  résulte du fait que cette équation est équivalente à un système de  $m$  équations différentielles linéaires du premier ordre.

### Intersection de sous-espaces affines:

Soit  $(A_j = a_j + W_j)_{j \in J}$  une famille de sous-espaces affines de  $X$ . Si elle n'est pas vide, l'intersection  $\bigcap_{j \in J} A_j$  est un sous-espace affine de direction  $\bigcap_{j \in J} W_j$ .

### Parallélisme

Deux sous-espaces affines sont dits parallèles s'ils ont même direction.

Un sous-espace  $(A, W)$  est dit *faiblement* parallèle au sous-espace  $(A', W')$  si  $W \subset W'$  ou si  $W' \subset W$ .

Deux droites distinctes du plan affine sont soit parallèles soit sécantes.

La position relative des droites est bien sûr plus complexe en dimension 3.

*A titre d'exemple, voici un triplet de droites  $D, D', D''$  de  $\mathbf{R}^3$  telles que  $D \cap D' = D \cap D'' = D' \cap D'' = \emptyset$  et aucune paire de droites  $(D, D'), (D, D''), (D', D'')$  ne sont coplanaires.*

Par contre, on a (cf TD):

### Intersection d'hyperplans

Deux hyperplans affines distincts d'un espace affine  $X$  soit sont parallèles, soit s'intersectent en un sous-espace affine de dimension  $\dim X - 2$ .

### Sous-espace affine $\langle P \rangle$ engendré par une partie $P \subset X$ :

Si  $P \subset X$ , on désigne par  $\langle P \rangle \subset X$  le plus petit (pour l'inclusion) sous-espace affine de  $X$  contenant  $P$ . C'est l'intersection de tous les sous-espaces affines de  $X$  contenant  $P$ .

### Exemples:

(1) Pour  $p \in X$  on a  $\langle p \rangle = \{p\}$ .

(2) Pour  $p, q \in X$  on a  $\langle p, q \rangle = p + \mathbf{k}\overrightarrow{pq}$ . C'est l'unique droite affine passant par  $p$  et  $q$ .

(3) Si  $p, q, r \in X$  sont trois points non alignés i.e. si  $\dim(\langle p, q, r \rangle) > 1$  alors  $\langle p, q, r \rangle = p + W$  où  $W$  est le plan vectoriel de base  $(\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pr})$ .

### 3. Applications affines.

Dans la plupart des contextes mathématiques, après avoir défini les *objets* (ici les espaces affines), on définit les *morphismes* (ici les applications affines).

Pour la suite  $(X, V)$  et  $(X', V')$  désignent deux espaces affines.

#### Application affine

Une application

$$f : X \longrightarrow X'$$

est affine s'il existe une application linéaire  $L : V \rightarrow V'$  et un point  $p \in X$  tels que

$$\forall x \in X, f(x) = f(p) + L(\overrightarrow{px}) \quad (\star)$$

*Observations:*

(1) Si  $(\star)$  est satisfaite pour un point  $p$  elle est satisfaite pour tous les points pour la même application linéaire  $L$ . En effet, pour tout point  $q \in X$ , on a

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + L(\overrightarrow{px}) \\ &= f(p) + L(\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qx}) \\ &= f(p) + (L(\overrightarrow{pq}) + L(\overrightarrow{qx})). \\ &= (f(p) + L(\overrightarrow{pq})) + L(\overrightarrow{qx}) \\ &= f(q) + L(\overrightarrow{qx}) \end{aligned}$$

(2) L'application affine  $f$  est déterminée par l'image d'un point  $p$  de  $X$  et par  $L$ .

(3) Par définition,  $L(\overrightarrow{px})$  est l'unique vecteur translatant  $f(p)$  sur  $f(x)$  i.e.

$$L(\overrightarrow{px}) = \overrightarrow{f(p)f(x)}.$$

Pour  $\vec{u} \in V$  on a  $L(\vec{u}) = \overrightarrow{f(p)f(p + \vec{u})}$ . L'application linéaire  $L$  est donc déterminée par  $f$ . On la notera  $L_f$  et on dira que  $L_f$  est l'application linéaire associée à  $f$ .

### Proposition

Soient  $p \in X$ ,  $p' \in X'$  et  $L : V \rightarrow V'$  une application linéaire.

Il existe une et une seule application affine  $f : X \rightarrow X'$  telle que  $f(p) = p'$  et  $L_f = L$ . Elle est donnée par

$$f(x) = p' + L(\overrightarrow{px}).$$

### Exemples d'applications affines

(1) Si  $p' \in X'$  l'application constante  $f : X \rightarrow X' : x \mapsto p'$  est affine pour  $L_f : V \rightarrow V' : \vec{v} \mapsto \vec{0}$ .

(2) L'application identité  $Id_X : X \rightarrow X : x \mapsto x$  est affine avec  $L_{Id_X} = Id_V$ .

(3) Les translations  $\tau_{\vec{v}} : X \rightarrow X : x \mapsto x + \vec{v}$  sont affines avec  $L_{\tau_{\vec{v}}} = Id_V$ .

(4) Toute application affine  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  est de la forme  $x \mapsto ax + b$  avec  $a, b \in \mathbf{R}$ . On a  $L_f(x) = ax$ .

(5) Plus généralement, toute application affine  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  est de la forme  $f(\vec{x}) = L(\vec{x}) + \vec{v}$  où  $L : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  est linéaire et  $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$ .

(6) Les homothéties qui sont les applications affines  $h : X \rightarrow X$  telle que  $L_h = \rho Id_V$  où  $\rho \in \mathbf{k} \setminus \{0, 1\}$  et l'application  $Id_X$ .

(7) La proposition qui précède donne toutes les applications affines.

**Tout espace affine est isomorphe comme espace affine à sa direction:**

On considère  $V$  comme espace affine de direction  $V$  et on choisit un point  $p \in X$ . On sait déjà que l'application

$$\Theta_p : X \rightarrow V : x \mapsto \overrightarrow{px}$$

est une bijection de réciproque  $\vec{v} \mapsto p + \vec{v}$ .

Il suffit ensuite d'observer que  $\Theta_p(x) = \vec{0} + \overrightarrow{px} = \Theta_p(p) + \overrightarrow{px}$ , i.e.  $\Theta_p$  est affine d'application linéaire associée  $L_{\Theta_p} = Id_V$ .

*Bis repetita*

Tout espace affine  $(X, V)$  de dimension  $d$  sur le corps  $\mathbf{k}$  est isomorphe comme espace affine à  $V$  et donc aussi à  $\mathbf{k}^d$ .

$\mathbf{k}^d$  est dès lors l'exemple d'espace affine par excellence.

Observer qu'en terme de la bijection  $\Theta_p : X \rightarrow V$ , une application  $f : X \rightarrow X'$  est affine ssi il existe une application linéaire  $L : V \rightarrow V'$  telle que pour un point  $p \in X$  (et dès lors pour tous les points  $p \in X$ )

$$f = \Theta_{f(p)}^{-1} \circ L \circ \Theta_p. \quad (\star)$$

### Propriétés des applications affines

- (1) Si  $f : X \rightarrow X'$  est affine alors  $f$  est injective (surjective) ssi  $L_f : V \rightarrow V'$  est injective (surjective)
- (2) Si  $f : X \rightarrow X'$  et  $g : X' \rightarrow X''$  sont affines alors  $g \circ f : X \rightarrow X''$  est affine et  $L_{g \circ f} = L_g \circ L_f$ .
- (3) Si  $f : X \rightarrow X'$  est affine et bijective alors  $f^{-1}$  est affine et  $L_{f^{-1}} = L_f^{-1}$ .

**Démo:** (1) Cela résulte immédiatement de  $(\star)$ .

(2) Observer que pour  $x \in X$ :

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(p) + L_f(\overrightarrow{px})) \\ &= (g \circ f)(p) + (L_g \circ L_f)(\overrightarrow{px}) \end{aligned}$$

(3) Par (1)  $L_f$  est bijective. Par  $(\star)$  pour  $p = f^{-1}(q)$  on a

$$f = \Theta_q^{-1} \circ L_f \circ \Theta_{f^{-1}(q)}$$

d'où

$$f^{-1} = \Theta_{f^{-1}(q)}^{-1} \circ L_f^{-1} \circ \Theta_q.$$

Soit  $(X, V)$  un espace affine. On désigne par  $Gl(V)$  le groupe des bijections linéaires de  $V$  et par  $GA(X)$  l'ensemble des bijections affines de  $X$ . Les deux propositions qui suivent rassemblent, pour les bijections affines, certaines des propriétés qui précèdent.

**Proposition:**  $GA(X)$  est un groupe pour la composition des applications. L'application

$$GA(X) \rightarrow Gl(V) : f \mapsto L_f$$

est un morphisme surjectif de groupes dont le noyau est l'ensemble  $\mathcal{T}$  des translations de  $X$ .

**Démo:**  $GA(X)$  est un groupe puisque  $Id_X$  est affine, ainsi que la composée et la réciproque de bijections affines.

On a  $L_{g \circ f} = L_g \circ L_f$  donc  $f \mapsto L_f$  est un morphisme de groupes.

L'application  $f \mapsto L_f$  est surjective car si  $L \in Gl(V)$ , en choisissant un point arbitraire  $o \in X$ , l'application  $f(x) = o + L(\overrightarrow{o\bar{x}})$  est affine et bijective (car  $L$  est bijective) et  $L_f = L$ . Pour conclure il suffit de vérifier que si  $f$  est affine avec  $L_f = Id_V$  alors  $f$  est une translation. Choisissons un point  $p \in X$ , on a  $f(x) = f(p) + \overrightarrow{p\bar{x}} = (p + \overrightarrow{p\bar{f}(p)}) + \overrightarrow{p\bar{x}} = (p + \overrightarrow{p\bar{x}}) + \overrightarrow{p\bar{f}(p)} = x + \overrightarrow{p\bar{f}(p)}$ .  $f$  est donc la translation de vecteur  $\overrightarrow{p\bar{f}(p)}$ .

Remarque: Comme noyau d'un morphisme de groupes, l'ensemble  $\mathcal{T}$  des translations de  $X$  est un sous-groupe distingué de  $GA(X)$ . En fait, pour  $f \in GA(X)$  et  $\vec{u} \in V$  on a

$$f \circ \tau_{\vec{u}} \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x) + \vec{u}) = x + L_f(\vec{u}).$$

C'est donc la translation de vecteur  $L_f(\vec{u})$ .

Voici une description complète de  $GA(X)$  en termes de  $V$ .

**Proposition** (Groupe Affine)

Soit  $(X, V)$  un espace affine et  $o \in X$  un point.

On désigne par  $G_o \subset GA(X)$  l'ensemble des bijections affines  $g$  telles que  $g(o) = o$ .

(1)  $G_o$  est un sous-groupe de  $GA(X)$ .

(2) Quel que soit  $f \in GA(X)$  il existe un unique vecteur  $\vec{v} \in V$  et une unique bijection affine  $\bar{f} \in G_o$  telle que

$$f = \tau_{\vec{v}} \circ \bar{f}.$$

(3) L'application

$$\sigma : GA(X) \rightarrow V \times Gl(V) : f \mapsto (\overrightarrow{o\bar{f}(o)}, L_f)$$

est une bijection.

(4) La loi de composition

$$(\vec{u}, l) \star (\vec{u}', l') = (\vec{u} + l(\vec{u}'), l \circ l')$$

est une loi de groupe sur  $V \times Gl(V)$  pour laquelle  $\sigma$  est un isomorphisme de groupes.

**Démo:** (1) Clair.

(2) Cette décomposition existe car

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(o) + L_f(\vec{o}\vec{x}) \\
 &= (o + \vec{o}f(o)) + L_f(\vec{o}\vec{x}) \\
 &= (o + L_f(\vec{o}\vec{x})) + \vec{o}f(o) \\
 &= (\tau_{\vec{o}f(o)} \circ \bar{f})(x).
 \end{aligned}$$

où  $\bar{f}$  est l'unique application affine telle que  $\bar{f}(o) = o$  et  $L_{\bar{f}} = L_f$ .

La décomposition est unique car si

$$\tau_{\vec{u}} \circ g = \tau_{\vec{v}} \circ h$$

pour  $g, h \in G_o$  alors

$$o + \vec{u} = (\tau_{\vec{u}} \circ g)(o) = (\tau_{\vec{v}} \circ h)(o) = o + \vec{v}.$$

D'où  $\vec{u} = \vec{v}$  et ensuite  $g = h$ .

(3) L'application  $V \times Gl(V) \rightarrow GA(X) : (\vec{u}, l) \mapsto \tau_{\vec{u}} \circ l_o$ , où  $l_o \in GA(X)$  est définie par  $l_o(x) = o + l(\vec{o}\vec{x})$ , est la réciproque de  $\sigma$ .

(4) Une remarque préalable: Supposons que  $(G, \circ)$  soit un groupe,  $\mathcal{E}$  un ensemble et que  $s : G \rightarrow \mathcal{E}$  soit une bijection.

Alors la LCI sur  $\mathcal{E}$  définie par

$$x \star x' = s(s^{-1}(x) \circ s^{-1}(x'))$$

pour  $x, x' \in \mathcal{E}$ , est une loi de groupe sur  $\mathcal{E}$ .

On dit qu'on a transporté la loi  $\circ$  de  $G$  sur  $\mathcal{E}$  par la bijection  $s$ .  $s$  est alors un isomorphisme de groupe de  $G$  sur  $\mathcal{E}$ .

Revenons à la démo: On va montrer que la loi  $\star$  de l'énoncé résulte du transport par la bijection  $\sigma$  de la composition  $\circ$  de  $GA(X)$  sur  $V \times Gl(V)$ .

Il suffit de calculer

$$\begin{aligned}
 \sigma(\sigma^{-1}(\vec{u}, l) \circ \sigma^{-1}(\vec{u}', l')) &= \sigma(\tau_{\vec{u}} \circ l_o \circ \tau_{\vec{u}'} \circ l'_o) \\
 &= (\vec{u} + l(\vec{u}'), l \circ l') \\
 &= (\vec{u}, l) \star (\vec{u}', l').
 \end{aligned}$$

*Remarques:*

- Cette proposition exprime de manière précise le fait que la différence essentielle entre les automorphismes affines  $GA(X)$  et vectoriels  $Gl(V)$  est le groupe  $\mathcal{T}$  des translations de  $X$ .  $(V, +)$  est isomorphe à  $\mathcal{T}$  par l'application  $\vec{u} \mapsto \tau_{\vec{u}}$ .

La loi  $\star$  sur  $V \times Gl(V)$  est un exemple de *produit semi-direct* de groupes.

- Si  $Aff(X)$  désigne l'ensemble des applications affines (non nécessairement bijectives) de  $X$ ,  $Aff_o(X)$  désigne l'ensemble des applications affines de  $X$  qui fixent  $o$  et  $End(V)$  l'ensemble des applications linéaires de  $V$  alors par le même argument on a  $Aff(X) \simeq V \times End(V)$ .

### Applications affines et sous-espaces:

On suppose que  $f : X \rightarrow X'$  est affine. Soit  $A \subset X$  (*resp.*  $A' \subset X'$ ) un sous-espace affine de direction  $W \subset V$  (*resp.*  $W' \subset V'$ ).

(1)  $f(A) \subset X'$  est un sous-espace affine de direction  $L_f(W) \subset V'$ .

(2) (On ne suppose pas  $f$  bijective)

$f^{-1}(A') = \{x \in X, f(x) \in A'\}$  est un sous-espace affine de direction  $L_f^{-1}(W') \subset V$ .

(3) Si  $g : X \rightarrow X$  est affine et  $g(A) \subset A$  alors la restriction  $g|_A$  de  $g$  à  $A$  est affine et  $L_{g|_A} = (L_g)|_A$ .

On peut lire ces propriétés de deux manières complémentaires:

(1) Les applications affines *se comportent bien* vis à vis des sous-espaces affines.

(2) La notion de sous-espace affine est *une bonne notion géométrique* dans le cadre affine.

Il résulte de (1) que toute application affine bijective  $f$  envoie trois points alignés  $a, b, c$  sur trois points alignés  $f(a), f(b), f(c)$ .

Pour les espaces affines réels, cette propriété caractérise les bijections affines:

**Théorème:** Une application bijective d'un espace affine réel de dimension  $n \geq 2$  est affine si et seulement si l'image de tout triplet de points alignés est un triplet de points alignés.

## 4. Sous-espaces, repères, équations cartésiennes.

### Quand deux sous-espaces affines s'intersectent-ils?

Soient  $(A, W)$  et  $(A', W')$  deux sous-espaces affines de l'espace affine  $(X, V)$  et  $a \in A$ ,  $a' \in A'$ .

$$A \cap A' \neq \emptyset \Leftrightarrow \overrightarrow{aa'} \in W + W'.$$

Démo: Si  $z \in A \cap A'$  on a  $A = z + W$  et  $A' = z + W'$ , d'où  $\overrightarrow{za} \in W$  et  $\overrightarrow{za'} \in W'$  et  $\overrightarrow{aa'} = \overrightarrow{az} + \overrightarrow{za'} \in W + W'$ .

Réciproquement, écrivons  $\overrightarrow{aa'} \in W + W'$  sous la forme  $\overrightarrow{aa'} = \overrightarrow{w} + \overrightarrow{w'}$  (cette décomposition peut ne pas être unique). On a  $a' = a + (\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w'})$  et le point  $a' - \overrightarrow{w} = a + \overrightarrow{w'}$  appartient à  $A \cap A'$ .

Si  $W + W' = V$ , alors quels que soient  $a \in A$  et  $a' \in A'$   $\overrightarrow{aa'} \in W + W'$ , et donc, par la proposition,  $A \cap A' \neq \emptyset$ .

### Sous-espaces supplémentaires

Deux sous-espaces affines  $(A, W)$  et  $(A', W')$  sont appelés supplémentaires si

$$V = W \oplus W'.$$

Dans ce cas,  $A \cap A'$  est non vide donc un sous-espace affine de direction  $W \cap W' = \{\vec{0}\}$  i.e.  $A \cap A'$  est un point.

### Projections, symétries

Soit  $(A, W)$  un sous-espace affine de  $(X, V)$  et  $W' \subset V$  un sous-espace vectoriel tel que  $V = W \oplus W'$ .

Pour  $m \in X$ , les sous-espaces affines  $m + W'$  et  $A$  sont supplémentaires. Soit  $p(m)$  leur unique point d'intersection.

L'application

$$X \rightarrow X : m \mapsto p(m)$$

est appelée la projection sur  $A$  parallèlement à la direction  $W'$ .  $p$  est affine et

$$L_p : V = W \oplus W' \rightarrow V : \vec{w} + \vec{w}' \mapsto \vec{w}.$$

Observer que  $p \circ p = p$ . Toute application affine  $p : X \rightarrow X$  vérifiant  $p \circ p = p$  est appelée un projecteur affine.

Tout projecteur affine  $p : X \rightarrow X$  est la projection sur  $o + Ker(L_p - Id_V)$  parallèlement à  $Ker L_p$  où  $o \in p(X)$ .

L'application

$$s : X \rightarrow X : m \mapsto p(m) - \overrightarrow{p(m)m}$$

est affine et

$$L_s : V \rightarrow V : \vec{w} + \vec{w}' \mapsto \vec{w} - \vec{w}'.$$

Observer que  $s$  est involutive i.e.  $s \circ s = Id_X$ . Toute application affine involutive est appelée une symétrie affine. Toute symétrie affine  $s : X \rightarrow X$  admet un point fixe  $o$  et est la symétrie de sous-espace fixe  $o + Ker(L_s - Id_V)$  parallèlement au sous-espace  $W' = Ker(L_s + Id_V)$  (cf TD).

Un exemple d'itération de projections:(cf TD)

Plans de symétrie d'un tétraèdre régulier  $T$ : les six plans passant par une arête de  $T$  et le centre du cube:

**Remarque** Les projections et les symétries jouent un rôle important dans des contextes assez divers. Les premières permettent par exemple d'argumenter par induction sur la dimension, ou de faire des constructions itératives; les secondes interviennent dans de nombreuses questions de théorie des groupes parce qu'elles constituent en quelque sorte des transformations élémentaires de l'espace en termes desquelles on peut exprimer certaines transformations plus complexes. On verra par exemple que toute rotation est la composée de certaines symétries. (*Voir le chapitre 2 pour tout ceci.*)

**Expression d'une application affine dans un repère.**

Soit  $f : X \rightarrow X$  une application affine et  $(o; B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_d))$  un repère de  $X$ . On a

$$f(m) = f(o) + L_f(\overrightarrow{om}) = o + \overrightarrow{of(o)} + L_f(\overrightarrow{om}).$$

Dès lors si  $(x_1, \dots, x_d)$  sont les coordonnées de  $m$  dans  $(o, B)$ ,  $(z_1, \dots, z_d)$  celles de  $f(o)$

et  $(x'_1, \dots, x'_d)$  celles de  $f(m)$ , on a

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_d \end{pmatrix} + \mathbf{L} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$$

où  $\mathbf{L}$  est la matrice de  $L_f$  dans la base  $B$ .

### Applications affines avec prescription

Une notion préliminaire sur les familles de points:  $(p_0, p_1, \dots, p_m) \in X^{m+1}$  est dite affinement libre si la famille de vecteurs  $(\overrightarrow{p_0 p_i})_{1 \leq i \leq m}$  est libre dans  $V$ .

$(p_0, \dots, p_m)$  est dite affinement génératrice si  $\langle p_0, \dots, p_m \rangle = X$ .

[Ces propriétés ne dépendent pas de l'ordre des points (cf TD).]

Comme dans le cas vectoriel, une base affine est une famille  $(p_0, \dots, p_d) \in X^{d+1}$  génératrice et libre.

Fait:  $(o, o + \vec{b}_1, \dots, o + \vec{b}_d)$  est une base affine ssi  $(o; (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_d))$  est un repère affine.

Exemple: en dimension 3, une base affine est l'ensemble des sommets d'un tétraèdre.

Soient  $(X, V)$  et  $(X', V')$  deux espaces affines avec  $\dim X = d$ .

**P1:** Soit  $(p_0, \dots, p_d)$  une base affine de  $X$  et  $p'_0, \dots, p'_d$  des points de  $X'$ . Il existe une unique application affine

$$f : X \rightarrow X' \text{ telle que } f(p_j) = p'_j, \forall 0 \leq j \leq d.$$

**Démo:** On a  $f(p_0) = p'_0$  et pour  $1 \leq j \leq d$ .

$$f(p_j) = p'_j \Leftrightarrow L_f(\overrightarrow{p_0 p_j}) = \overrightarrow{p'_0 p'_j}$$

ce qui détermine  $L_f$  puisque  $(\overrightarrow{p_0 p_j})_{1 \leq j \leq d}$  est une base.

**P2:** Le groupe  $GA(X)$  opère de manière transitive et simple sur l'ensemble  $\mathcal{R}$  des bases affines de  $X$ .

**Démo:** Soit une base affine  $(p_0, \dots, p_d)$  de  $X$ . Pour toute bijection affine  $f \in GA(X)$  le  $d+1$ -uplet  $(f(p_0), \dots, f(p_d))$  est une base affine de  $X$ .

En effet, la famille

$$(\overrightarrow{f(p_0) f(p_i)})_{1 \leq i \leq d} = (L_f(\overrightarrow{p_0 p_i}))_{1 \leq i \leq d}$$

est libre puisque  $L_f$  est bijective et  $(\overrightarrow{p_0 p_i})_{1 \leq i \leq d}$  est libre.

Dès lors l'application

$$\phi : GA(X) \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R} : (f, (p_0, p_1, \dots, p_d)) \mapsto (f(p_0), f(p_1), \dots, f(p_d))$$

est bien définie. C'est une opération puisque  $\phi_{Id_X}(p_0, \dots, p_d) = (p_0, \dots, p_d)$  et  $\phi_{g \circ f} = \phi_g \circ \phi_f$ .

D'autre part, par **P1**, toute base affine  $(p'_0, \dots, p'_d)$  est l'image de  $(p_0, \dots, p_d)$  par une unique application affine  $f$ . Puisque  $L_f$  envoie la famille libre  $(\overrightarrow{p_0 p_i})_{1 \leq i \leq d}$  sur la famille libre  $(\overrightarrow{p'_0 p'_i})_{1 \leq i \leq d}$ ,  $L_f$  est bijective, et donc  $f \in GA(X)$ .

*Conclusion:* l'opération  $\phi$  est transitive ( $f$  existe) et simple ( $f$  est unique).

*Remarque:* Cette dernière propriété montre qu' 'il y a autant de bases affines que de bijections affines.

Voici une application géométrique de la proposition P2 qui peut surprendre:

On appelle *triplexe* de droites de  $\mathbf{R}^3$  tout triplet de droites deux à deux disjointes et deux à deux non coplanaires (cf les trois arêtes du cube plus haut).

Propriété (cf TD):

*Etant donnés deux triplexes  $(D, D', D'')$ ,  $(\Delta, \Delta', \Delta'')$  de  $\mathbf{R}^3$ , il existe une unique bijection affine  $f$  telle que*

$$(f(D), f(D'), f(D'')) = (\Delta, \Delta', \Delta'').$$

*Remarque (cf TD):* l'utilisation concrète de bijections affines transformant une configuration (un ensemble de points, un triangle, un cercle, un sous-espace, une quadrique,...) en une autre peut se révéler utile pour se ramener à une configuration type que l'on peut analyser plus simplement.

### Equations des sous-espaces dans un repère.

Il s'agit ici des tout premiers pas en *géométrie analytique* ou *différentielle*. La géométrie analytique utilise l'analyse pour décrire des lieux géométriques de  $\mathbf{R}^n$  ou  $\mathbf{C}^n$  en décrivant ces lieux par des équations dans un repère.

*Rappel d'un lemme d'algèbre linéaire*

Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $d$  sur  $\mathbf{k}$ .

Une partie  $W \subset V$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $p$  ssi  $W$  est le noyau d'une application linéaire surjective  $l : V \rightarrow \mathbf{k}^{d-p}$ .

Démo du lemme:  $\text{Ker } l \subset V$  est bien un sous-espace et sa dimension est  $p$  par le théorème du rang.

Réciproquement, soit  $(\vec{b}_j)_{1 \leq j \leq d}$  une base de  $V$  adaptée à  $W$ , i.e. telle que  $(\vec{b}_j)_{1 \leq j \leq p}$  soit une base de  $W$ .

Soit  $(\beta_j)_{1 \leq j \leq d}$  la base duale de  $V^*$ , i.e.  $\beta_i(\vec{b}_j) = \delta_{ij}$ . L'application linéaire

$$l : V \rightarrow \mathbf{k}^{d-p} : \vec{u} \mapsto (\beta_{p+1}(\vec{u}), \dots, \beta_d(\vec{u}))$$

est surjective et de noyau  $W$ .

Soit maintenant  $A = a + W \subset X$  un sous-espace affine de dimension  $p$  et  $l$  une application linéaire telle que  $\text{Ker } l = W$  comme dans le lemme.

Soit  $(o; B = (\vec{b}_i)_{1 \leq i \leq d})$  un repère de  $X$  et  $B_0 = (\vec{e}_j)_{1 \leq j \leq d-p}$  la base canonique de  $\mathbf{k}^{d-p}$ .

On a  $m \in A$  ssi  $\vec{am} \in W$  ssi  $l(\vec{am}) = (0, \dots, 0)$  ssi

$$l(\vec{am}) = l(\vec{oa}) \tag{*}$$

Ecrivons  $\vec{am} = \sum_{i=1}^d x_i \vec{b}_i$  et  $\vec{oa} = \sum_{i=1}^d z_i \vec{b}_i$  et soit

$$L := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1d} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{d-p1} & \cdots & a_{d-pd} \end{pmatrix}$$

la matrice de  $l$  rapportée aux bases  $B$  et  $B_0$ .

L'équation (\*) s'écrit

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1d}x_d &= d_1 \\ \vdots + \dots + \vdots &= \vdots \\ a_{d-p1}x_1 + \dots + a_{d-pd}x_d &= d_{d-p} \end{aligned}$$

où  $d_i = a_{i1}z_1 + \dots + a_{id}z_d$ ,  $1 \leq i \leq d-p$ .

C'est un système inhomogène de  $d-p$  équations linéaires indépendantes appelé système d'équations cartésiennes du sous-espace affine  $A$  dans le repère  $(o; B)$ .

### Le cas d'un hyperplan

C'est le cas où  $p = d-1$ . Soit  $l : V \rightarrow \mathbf{k}$  une forme linéaire non nulle telle  $W = \text{Ker } l$ . Posons  $l(\vec{b}_i) = a_i$ . On a alors  $m \in A$  ssi

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_dx_d = a_1z_1 + \dots + a_dz_d$$

Remarquer que décrire un sous-espace affine de dimension  $p$  comme l'ensemble des solutions d'un système de  $d-p$  équations linéaires indépendantes revient à le réaliser comme l'intersection de  $d-p$  hyperplans affines. Pour un repère donné, un sous-espace de dimension  $p \leq d-2$  peut s'écrire de multiples manières comme intersection d'hyperplans:

*Exemple*

Pour un hyperplan, l'équation cartésienne dans un repère est unique à un multiple près.

*Exercice:* Soit  $\mathbf{R}^3$  rapporté au repère canonique  $(\vec{0}; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et soit  $C \subset \mathbf{R}^3$  le cube porté par ce repère.

Donner, dans le repère canonique, les équations cartésiennes des plans  $P_i$  et des droites  $D_i, 1 \leq i \leq 3$  suivantes:

### 5. Barycentres, convexité, polyèdres.

Le *barycentre* ou *centre de gravité* est une moyenne pondérée d'une famille de points. Cette notion trouve son origine dans la mécanique des systèmes de masses.

Soit  $p_0, \dots, p_m, , m+1$  points d'un espace affine  $(X, V)$  sur le corps  $\mathbf{k}$  et  $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbf{k}$ . On va considérer l'application

$$f : X \rightarrow V : x \mapsto \sum_{i=0}^m a_i \overrightarrow{xp_i}.$$

Si  $\sum_{i=0}^m a_i = 0$ , alors  $f$  est une application constante: en effet

$$\begin{aligned} f(x') &= \sum_{i=0}^m a_i \overrightarrow{x'p_i} \\ &= \sum_{i=0}^m a_i (\overrightarrow{x'x} + \overrightarrow{xp_i}) \\ &= \left(\sum_{i=0}^m a_i\right) \overrightarrow{x'x} + \sum_{i=0}^m a_i \overrightarrow{xp_i} \\ &= \vec{0} + f(x) = f(x). \end{aligned}$$

Si  $\sum_{i=0}^m a_i \neq 0$ , alors  $f$  est bijective:

Elle est injective car  $f(x) = f(x') \Leftrightarrow (\sum_{i=0}^m a_i) \overrightarrow{xx'} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{xx'} = \vec{0}$ .

Elle est surjective: pour  $\vec{v} \in V$  il suffit de trouver  $x \in X$  tel que  $f(x) = \vec{v}$ . Soit  $q \in X$  un point arbitraire,  $\vec{v} = f(x)$  s'écrit

$$\vec{v} = \sum_i a_i \overrightarrow{xp_i} = \sum_i a_i (\overrightarrow{xq} + \overrightarrow{qp_i}) = \left(\sum_i a_i\right) \overrightarrow{xq} + f(q)$$

Donc  $x = q + \overrightarrow{qx} = q + \frac{1}{\sum_j a_j} (f(q) - \vec{v})$  convient. Il est unique par injectivité.

## Barycentre

Lorsque  $\sum_{i=0}^m a_i \neq 0$  le barycentre  $s$  des points pondérés  $(p_i, a_i)_{0 \leq i \leq m}$  est l'unique point  $s$  de  $X$  tel que  $f(s) = 0$ .

Quel que soit  $q \in X$ ,  $s$  est donné par (prendre  $\vec{v} = \vec{0}$ )

$$s = q + \sum_{i=0}^m \frac{a_i}{\sum_{j=0}^m a_j} \overrightarrow{qp_i}.$$

On utilise la notation  $s = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_m \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_m \end{pmatrix}$ .

Lorsque les coefficients  $a_i$  sont égaux on parle d'isobarycentre:

$$IsoB = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_m \\ a & a & \cdots & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_m \\ \frac{1}{m+1} & \frac{1}{m+1} & \cdots & \frac{1}{m+1} \end{pmatrix}$$

## Associativité

Le calcul du barycentre est associatif au sens suivant:

Soit  $p_0, \dots, p_m \in X$ ,  $a_0, \dots, a_m \in \mathbf{k}$  tels que  $\bar{a} := \sum_{i=0}^m a_i \neq 0$ .

Soit  $(P_k)_{0 \leq k \leq q}$  une partition de  $\{0, 1, \dots, m\}$ .

On suppose que  $\forall k \in \{0, 1, \dots, q\}$ ,  $\bar{a}_k := \sum_{i \in P_k} a_i \neq 0$  et on désigne par  $s_k$  le barycentre des points pondérés  $(p_i, a_i)_{i \in P_k}$ .

On a

$$\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_m \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_q \\ \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \cdots & \bar{a}_q \end{pmatrix}$$

Corollaire: Si  $\mathbf{k}$  est le corps des réels ou des complexes, le calcul du barycentre se ramène au calcul du barycentre de deux points.

*Pour les démos de l'associativité et du corollaire cf cours.*

### Applications géométriques élémentaires

(1) *Les médianes d'un triangle sont concourantes*

(2) Soit  $(p_0, p_1, p_2, p_3)$  les quatre sommets d'un tétraèdre de  $\mathbf{R}^3$ .

Les quatre droites joignant le point d'intersection des médianes d'une face au sommet opposé à cette face sont concourantes.

### Coordonnées barycentriques

Soit  $(p_0, p_1, \dots, p_d)$  une base affine de l'espace affine  $(X, V)$  de dimension  $d$ . Soit l'hyperplan affine  $\mathbf{H} := \{(a_0, a_1, \dots, a_d) \in \mathbf{k}^{d+1} \mid a_0 + a_1 + \dots + a_d = 1\}$ .

L'application

$$s : \mathbf{H} \longrightarrow X$$

$$(a_0, \dots, a_d) \mapsto \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_d \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_d \end{pmatrix}$$

est une bijection affine. Si  $m = s(a_0, \dots, a_d)$  on dit que  $(a_0, \dots, a_d)$  sont les coordonnées barycentriques normalisées (par  $\sum_i a_i = 1$ ) de  $m$  dans la base  $(p_i)_{0 \leq i \leq d}$ .

### Applications affines et barycentres

Toute application affine  $f : X \rightarrow X'$  préserve le barycentre:

$$f\left(\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_m \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_m \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f(p_0) & f(p_1) & \cdots & f(p_m) \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_m \end{pmatrix}$$

On peut montrer que cette propriété caractérise les applications affines i.e. qu' *une application ensembliste  $f : X \rightarrow X'$  est affine ssi elle envoie le barycentre de toute famille finie de points sur le barycentre des points images.* (Démonstration éventuellement en TD.)

Voici une application très utile:

#### Point fixe

Soit  $P \subset X$  une partie finie,  $s$  l'isobarycentre des points de  $P$  et  $f : X \rightarrow X$  une bijection affine. Alors

$$f(P) = P \Rightarrow f(s) = s$$

*i.e. toute bijection affine qui laisse une partie finie stable admet un point fixe.*

*Exemple:* Toute bijection affine qui permute les sommets d'un cube fixe son centre:

Soit  $G_P \subset GA(X)$  le sous-groupe des bijections affines  $f$  telles que  $f(P) \subset P$ . Par ce qui précède l'isobarycentre est un *point fixe commun* aux éléments de  $G_P$ . Le morphisme  $L : G_P \rightarrow GL(V) : f \mapsto L_f$  est donc injectif:  $L_f = L_{f'} \Rightarrow f(x) = s + L_f(\overrightarrow{s\bar{x}}) = f'(x)$ . La détermination de  $G_P$  se ramène donc à une question linéaire.

*Exemple:*  $(0, 0)$  est un point fixe commun aux bijections affines qui préservent l'ensemble  $C_n$  des sommets du polygone régulier à  $n$  côtés de  $\mathbf{R}^2$ . Dès lors, toute bijection affine  $f$  du plan telle que  $f(C_n) = C_n$  est linéaire.

Pour  $n = 3$ ,  $G_{C_3}$  est constitué de l'identité, de deux rotations d'angles respectifs  $\frac{2\pi}{3}$  et  $\frac{4\pi}{3}$  et de trois symétries orthogonales de droites fixes les médianes du triangle. De plus  $G_{C_3}$  est isomorphe au groupe des permutations  $\mathcal{S}_3$ .

### Convexité

On suppose ici que  $(X, V)$  est un espace affine **réel** de dimension finie.

Si  $p, q \in X$ , le segment  $[p, q]$  est par définition

$$\begin{aligned} [p, q] &= \{p + t\overrightarrow{pq}, t \in [0, 1]\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} p & q \\ 1-t & t \end{pmatrix}, t \in [0, 1] \right\} \end{aligned}$$

Une partie  $C \subset X$  est dite convexe si  $\forall p, q \in C$ , le segment  $[p, q] \subset C$ .

*Exemples:* Le disque unité du plan est convexe tandis que le disque unité époiné n'est pas convexe.

Propriétés:

- (1) L'intersection de toute famille de convexes est convexe
- (2) L'image d'un convexe par une application affine est convexe
- (3) L'image réciproque de tout convexe par une application affine est convexe.

### Enveloppe convexe

Soit  $P = \{p_0, \dots, p_m\} \subset X$  une partie finie de  $X$ . On appelle enveloppe convexe de  $P$  le plus petit convexe de  $X$  contenant  $P$ . C'est l'intersection de tous les convexes contenant  $P$ .

*Exemple:* L'hexagone plein est l'enveloppe convexe de l'étoile à six branches.

### Proposition

La partie

$$[p_0, p_1, \dots, p_m] := \left\{ \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_m \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_m \end{pmatrix} \mid \sum_{i=0}^m a_i = 1, 0 \leq a_i, \forall i \right\}$$

est convexe et  $[p_0, p_1, \dots, p_m]$  est l'enveloppe convexe de  $P$ .

Remarque: Observer, par contraste, que le sous-espace affine  $\langle P \rangle$  engendré par  $P$  est donné par

$$\langle P \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_m \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_m \end{pmatrix} \mid \sum_{i=0}^m a_i = 1 \right\}$$

(Pour les démos cf TD.)

### Questions métriques

Soit  $N = \|\cdot\|$  une norme sur l'espace vectoriel  $V$  réel ou complexe de dimension  $n$  et  $(X, V)$  un espace affine.

L'application

$$d : X \times X \rightarrow \mathbf{R} : (x, y) \mapsto \|\overrightarrow{xy}\|$$

est une distance sur  $X$ .

Tout espace affine  $X$  sur  $V$  est donc naturellement un espace métrique.

Soit  $d_V(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|$  la distance sur  $V$  induite par  $N$ . Pour chaque  $x \in X$  l'application

$$\Theta_x : X \rightarrow V : y \mapsto \overrightarrow{xy}$$

est une isométrie i.e.

$$d(y, z) = d_V(\Theta_x(y), \Theta_x(z)).$$

En particulier  $\Theta_x$  est un homéomorphisme pour les topologies métriques sur  $(X, d)$  et  $(V, d_V)$ .

Soit maintenant  $f : X \rightarrow X'$  une application affine où  $(X, V)$  et  $(X', V')$  sont munis de la topologie qu'on vient de définir. Pour tout point  $x \in X$

$$f = \Theta_{f(x)}^{-1} \circ L_f \circ \Theta_x$$

Par ailleurs, on sait qu'en dimension finie toute application linéaire  $L : V \rightarrow V'$  est continue pour les topologies associées aux distances  $d_V$  et  $d_{V'}$ , dès lors, comme composée d'applications continues, *toute application affine  $f$  est continue.*

### Formes affines et demi-espaces

Soit  $(X, V)$  un espace affine de dimension  $n$  sur le corps  $\mathbf{k}$ . Une forme affine est une application affine  $f : X \rightarrow \mathbf{k}$ .

Tout hyperplan affine  $H \subset X$  s'écrit  $H = f^{-1}(0)$  pour une forme affine  $f$  non constante.

Démo: Pour commencer, observer que  $f^{-1}(0)$  est un hyperplan affine. En effet  $\{0\} \subset \mathbf{k}$  est un sous-espace affine, dès lors  $f^{-1}(0) \subset X$  est un sous-espace affine de direction  $L_f^{-1}(0)$  qui est de dimension  $n - 1$  car  $L_f$  n'est pas nulle. Réciproquement, tout hyperplan s'écrit  $H = p + \text{Ker } l$  où  $l : V \rightarrow \mathbf{k}$  est linéaire et non nulle. L'application  $f : X \rightarrow \mathbf{k} : x \mapsto l(\overrightarrow{px})$  est affine, non constante et  $H = f^{-1}(0)$ .

On suppose maintenant que  $\mathbf{k} = \mathbf{R}$  muni de sa topologie métrique usuelle. Comme  $\{0\} \subset \mathbf{R}$  est fermé, tout hyperplan  $H = f^{-1}(0)$  est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Dès lors tout sous-espace affine est fermé comme intersection d'hyperplans. Ces sous-espaces sont bien sûr aussi convexes (pourquoi?).

Si  $f$  est une forme affine non constante, on appelle demi-espaces fermés les convexes  $f^{-1}(\mathbf{R}_\pm)$  et demi-espaces ouverts les convexes  $f^{-1}(\mathbf{R}_\pm \setminus \{0\})$ . On a la décomposition

$$X = f^{-1}(\mathbf{R}_+ \setminus \{0\}) \cup f^{-1}(0) \cup f^{-1}(\mathbf{R}_- \setminus \{0\})$$

*exemple:*  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R} : (x, y) \mapsto y - ax - b$  où  $a, b \in \mathbf{R}$ .

## Polyèdres convexes

Un polyèdre convexe de l'espace affine métrique réel  $(X, d)$  de dimension finie  $n$  est une partie

$P \subset X$  qui est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés.

Un polytope de  $X$  est un polyèdre convexe, compact et d'intérieur non vide (compact est ici équivalent à fermé et borné). En dimension 2 on parle de polygone.

*Exemples de polyèdres convexes dans le plan*

### Exemples importants de polytopes

Soit  $(p_0, p_1, \dots, p_n)$  une base affine de  $\mathbf{R}^n$ . L'enveloppe convexe  $[p_0, \dots, p_n]$  est un polytope appelé un  $n$ -simplexe.

Le simplexe standard est l'enveloppe convexe de la base affine canonique  $(\vec{0}, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  de  $\mathbf{R}^n$ , i.e.

$$\Sigma = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid 0 \leq x_i, \sum_{i=1}^n x_i \leq 1\}$$

En dimension 3,  $\Sigma$  est le tétraèdre standard

Le cube standard de  $\mathbf{R}^n$

$$C = \{(x_1, \dots, x_n) \mid |x_i| \leq 1, \forall 1 \leq i \leq n\}$$

Le cocube standard de  $\mathbf{R}^n$

$$C^* = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1\}$$

En dimension 2, voici  $C^*$ :

En dimension 3,  $C^*$  est l'octaèdre régulier (assemblage convexe de huit triangles équilatéraux identiques).

*Remarques:*

(1) On montrera au chapitre 3 qu'il y a, à similitude près, exactement cinq polytopes réguliers (assemblages convexes de faces polygonales régulières identiques) de  $\mathbf{R}^3$ .

(2) On peut appeler *polyèdre* (non nécessairement convexe) toute réunion d'un nombre fini de polyèdres convexes. Cette définition permet une grande diversité de situations (cfr. certains *origamis* ou *pliages* ou encore *collages*).