

# Géométrie Élémentaire

Serge Parmentier

Automne 2008

## CHAPITRE II

### 1- Rappel sur les formes bilinéaires

Dans ce chapitre, on désigne par  $V$  un espace vectoriel réel de dimension finie  $n$  et par

$$B : V \times V \longrightarrow \mathbf{R}$$

une forme bilinéaire (1), symétrique (2), non-dégénérée (3):

$$(1) \forall u, u', v, v' \in V, \alpha, \beta \in \mathbf{R},$$

$$B(u + \alpha u', v) = B(u, v) + \alpha B(u', v) \quad B(u, v + \beta v') = B(u, v) + \beta B(u, v')$$

$$(2) \forall u, v \in V, B(u, v) = B(v, u)$$

$$(3) \forall u \in V, B(u, v) = 0 \quad \forall v \in V \Rightarrow u = 0$$

**Remarque:** Soit  $V^* = \{l : V \rightarrow \mathbf{R}, l \text{ linéaire} \}$  l'espace dual de  $V$  et

$$\mathcal{B} : V \rightarrow V^* : u \mapsto \mathcal{B}(u)$$

l'application linéaire définie par  $\mathcal{B}(u)(v) = B(u, v)$ . La condition (3) équivaut à  $\mathcal{B}$  est injective.

Si  $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une base de  $V$  on désigne par  $[B]$  la matrice carrée de taille  $n$  dont la composante  $ij$  vaut  $B(b_i, b_j)$ .

Voici un *grand classique*

**Théorème** Il existe une base de  $V$  et un entier  $p \in \mathbf{N}$ , tels que la matrice  $[B]$  soit donnée par

$$I_{pq} = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix}, \quad p + q = n,$$

où  $1_p$  est la matrice identité de taille  $p$ .

L'entier  $p$  dépend seulement de  $B$ .

Le couple  $(p, q)$  est appelé la *signature* de  $B$ .

**Démo:** La preuve qui suit est elle aussi *très classique*.

$\iota$ ) Existence de la base: On procède par récurrence sur la dimension  $n$ .

C'est vrai pour  $n = 1$ . Montrons *vrai pour  $n \Rightarrow$  vrai pour  $n + 1$* :

Etape 1. Il existe un élément  $a_1 \in V$  tel que  $B(a_1, a_1) \neq 0$ . En effet, si  $B(u, u) = 0$  pour tout  $u \in V$ , l'identité de polarisation  $4B(u, v) = B(u + v, u + v) - B(u - v, u - v)$  montre que  $B(u, v) = 0$  pour tout  $u, v \in V$  ce qui contredit la propriété (3).

Etape 2. On considère le sous-espace

$$\langle a_1 \rangle^\perp = \{x \in V \mid B(x, a_1) = 0\}$$

On a

$$V = \langle a_1 \rangle \oplus \langle a_1 \rangle^\perp \quad (\star)$$

En effet, si  $x = \lambda a_1 \in \langle a_1 \rangle \cap \langle a_1 \rangle^\perp$ , alors  $0 = B(x, a_1) = \lambda B(a_1, a_1)$  d'où  $\lambda = 0$ . D'autre part quelque soit  $u \in V$  on a

$$u = \frac{B(x, a_1)}{B(a_1, a_1)} a_1 + \left(x - \frac{B(x, a_1)}{B(a_1, a_1)} a_1\right)$$

et le second terme appartient à  $\langle a_1 \rangle^\perp$ .

Etape 3. Observer que la restriction de  $B$  au sous-espace  $\langle a_1 \rangle^\perp$  satisfait (1), (2), (3). Par hypothèse de récurrence, on peut trouver une base  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$  de  $V$  adaptée à la somme directe  $(\star)$  dans laquelle

$$[B] = \begin{pmatrix} B(a_1, a_1) & O_{n-1} \\ {}^t O_{n-1} & \begin{pmatrix} 1_{\bar{p}} & 0 \\ 0 & -1_{\bar{q}} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

où  $\bar{p} + \bar{q} = n - 1$  et  $O_{n-1}$  est une ligne de 0. Pour conclure, il suffit de diviser  $a_1$  par  $\sqrt{\pm B(a_1, a_1)}$  selon le signe de  $B(a_1, a_1)$ : si  $B(a_1, a_1) > 0$ , la matrice de  $B$  dans la base  $(\frac{a_1}{\sqrt{B(a_1, a_1)}}, a_2, \dots, a_n)$  est  $I_{\bar{p}+1\bar{q}}$

si  $B(a_1, a_1) < 0$ , la matrice de  $B$  dans la base  $(a_2, \dots, a_{\bar{p}+1}, \frac{a_1}{\sqrt{-B(a_1, a_1)}}, a_{\bar{p}+2}, \dots, a_n)$  est  $I_{\bar{p}\bar{q}+1}$ .

$\mu$ ) Unicité de l'entier  $p$ : Soient  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base où  $[B] = I_{pq}$  et  $(a'_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base où  $[B] = I_{p'q'}$ .

Si  $x = \sum_{i=1}^p x_i a_i \in \langle a_1, \dots, a_p \rangle$ ,  $B(x, x) = \sum_{i=1}^p x_i^2 \geq 0$  et  $B(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$ .

Si  $x = \sum_{i=p'+1}^n x_i a'_i \in \langle a'_{p'+1}, \dots, a'_n \rangle$ ,  $B(x, x) = -\sum_{i=p'+1}^n x_i^2 \leq 0$  et  $B(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$ .

Dès lors  $\langle a_1, \dots, a_p \rangle \cap \langle a'_{p'+1}, \dots, a'_n \rangle = \{0\}$ . On a donc

$$\langle a_1, \dots, a_p \rangle \oplus \langle a'_{p'+1}, \dots, a'_n \rangle \subset V$$

et en comptant les dimensions,

$$p + (n - p') \leq \dim V = n,$$

i.e.  $p \leq p'$ . En échangeant le rôle des bases, on a aussi  $p' \leq p$ .

**Terminologie:** Si  $B$  est de signature  $(p, q)$ , toute base  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $V$  dans laquelle la matrice  $[B] = I_{pq}$  sera dite  $B$ -adaptée. Dans une telle base on a

$$B(x, y) = B\left(\sum_i x_i a_i, \sum_j y_j a_j\right) = \sum_{i=1}^p x_i y_i - \sum_{i=p+1}^n x_i y_i.$$

### Vecteurs isotropes

L'ensemble des éléments  $v \in V$  tels que  $B(v, v) = 0$  est appelé le cône isotrope de la forme  $B$ .

**Exemple** On a célébré en 2005 le centenaire de la parution de l'article d'A. Einstein sur la relativité restreinte. Dans cette théorie, intervient la forme bilinéaire sur  $\mathbf{R}^4$

$$B((x, y, z, t), (x', y', z', t')) = xx' + yy' + zz' - tt'$$

de signature  $(3, 1)$ . En guise d'exemple analogue, considérons sur  $\mathbf{R}^2$  la forme bilinéaire

$$B((x, t), (x', t')) = xx' - tt'$$

de signature  $(1, 1)$ . En terminologie physicienne,  $x$  est appelé coordonnée d'espace et  $t$  coordonnée de temps. La droite  $x = vt$  représente la trajectoire d'une particule en mouvement uniforme à vitesse  $v$  avec  $|v| \leq 1$  (où par convention la vitesse de la lumière dans le vide est de valeur absolue 1). Le cône isotrope de  $B$  est l'ensemble des  $(x, t)$  tels que  $x^2 - t^2 = (x - t)(x + t) = 0$ . C'est donc la réunion des trajectoires  $x = \pm t$  à vitesse  $\pm 1$ . C'est pourquoi le cône isotrope est appelé *cône de lumière*. Les trajectoires de particules matérielles sont localisées dans les régions  $|x| < |t|$  appelées *futur* et *passé*. Les régions inaccessibles aux trajectoires de particules  $|x| > |t|$  sont appelées *l'ailleurs*.

### Groupe des endomorphismes de $V$ qui préservent $B$ .

**Proposition :** L'ensemble  $O_B(V)$  des applications linéaires  $f : V \rightarrow V$  telles que  $B(f(u), f(v)) = B(u, v)$ ,  $\forall u, v \in V$  est un sous-groupe de  $Gl(V)$ .

**Démo:** Si  $f \in O_B(V)$  et  $u \in \text{Ker } f$  alors  $f(u) = 0 \Rightarrow 0 = B(f(u), f(v)) = B(u, v), \forall v \in V \Rightarrow u = 0$  par la propriété (3). Donc  $f$  est injective et dès lors bijective.

Clairement,  $Id_V \in O_B(V)$  et  $f, g \in O_B(V) \Rightarrow f \circ g \in O_B(V)$ .

Enfin  $B(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) = B(f(f^{-1}(u)), f(f^{-1}(v))) = B(u, v)$ .

**Proposition** Le groupe  $O_B(V)$  agit de façon transitive et simple sur l'ensemble  $\mathbf{B}$  des bases  $B$ -adaptées.

Démo: Soit  $\alpha = (a_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base  $B$ -adaptée et  $f \in O_B(V)$ . On a  $B(f(a_i), f(a_j)) = B(a_i, a_j)$ , dès lors la base  $f(\alpha) = (f(a_i))_{1 \leq i \leq n}$  est aussi  $B$ -adaptée. L'application

$$\phi : O_B(V) \times \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B} : \alpha \mapsto f(\alpha)$$

définit clairement une action.

Pour vérifier que  $\phi$  est transitive et simple, il suffit d'observer que pour toute paire de bases  $\alpha, \alpha' \in \mathbf{B}$ , l'unique bijection linéaire  $f \in Gl(V)$  telle que  $f(\alpha) = \alpha'$  appartient à  $O_B(V)$ : en effet, pour  $u = \sum_i x_i a_i, v = \sum_j y_j a_j$  on a

$$B(f(u), f(v)) = \sum_{i,j} x_i y_j B(f(a_i), f(a_j)) = \sum_{i,j} x_i y_j B(a_i, a_j) = B(u, v).$$

**$B$ -adjoint d'un endomorphisme** A tout endomorphisme  $f : V \rightarrow V$  on peut associer un endomorphisme dual

$$f^* : V^* \rightarrow V^* : \alpha \mapsto f^*(\alpha)$$

en posant  $f^*(\alpha)(u) = \alpha(f(u)), \forall u \in V$ . ( $V^*$  désigne le dual linéaire de  $V$ .)

Soit

$$\mathcal{B} : V \rightarrow V^* : u \mapsto \mathcal{B}(u)$$

la bijection linéaire définie par  $\mathcal{B}(u)(v) = B(u, v), \forall v \in V$ .

L'endomorphisme

$$f^* : V \rightarrow V : u \mapsto \mathcal{B}^{-1} \circ f^* \circ \mathcal{B}$$

est appelé le  $B$ -adjoint de  $f$ .

La relation  $\mathcal{B} \circ f^* = f^* \circ \mathcal{B}$  s'écrit

$$B(f(u), v) = B(u, f^*(v)), \quad \forall u, v \in V$$

On a les propriétés:  $Id_V^* = Id_V, (f + g)^* = f^* + g^*, (g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ .

Un endomorphisme  $f$  de  $V$  est dit  $B$ -symétrique ou auto-adjoint si  $f^* = f$ . Il est dit  $B$ -antisymétrique si  $f^* = -f$ .

**$O_B(V)$  en terme de l'adjoint**

Les 3 propriétés suivantes

i)  $f \in O_B(V)$    ii)  $f^* \circ f = Id_V$    iii)  $f \circ f^* = Id_V$  sont équivalentes.

**Démo:**  $\iota) \Leftrightarrow \iota)$ :

$$\begin{aligned} f \in O_B(V) &\Leftrightarrow \forall u, v, B(fu, fv) = B(u, v) \\ &\Leftrightarrow \forall u, v, B(u, (f^* \circ f)v) = B(u, v) \\ &\Leftrightarrow \forall u, v, B(u, (f^* \circ f - Id_V)v) = 0 \\ &\Leftrightarrow f^* \circ f = Id_V. \end{aligned}$$

$\iota) \Rightarrow \iota)$ :

$f^* \circ f = Id_V \Rightarrow f$  est bijectif  $\Rightarrow f^* = f^{-1} \Rightarrow f \circ f^* = Id_V$ . Pour la réciproque permuter les rôles de  $f$  et  $f^*$ .

**Ecriture dans une base:**

Soit  $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $V$ ,  $[B]$  la matrice dont la composante  $ij$  vaut  $B(b_i, b_j)$ ,  $[f]$  et  $[f^*]$  les matrices de  $f$  et  $f^*$  dans cette base. On a

$$[f^*] = [B]^{-1} {}^t[f] [B]$$

En particulier, si  $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une base  $B$ -adaptée (i.e.  $[B] = I_{pq} = [B]^{-1}$ ) on a

$$\begin{aligned} f \in O_B(V) &\Leftrightarrow I_{pq} {}^t[f] I_{pq} [f] = 1_n \\ f = \pm f^* &\Leftrightarrow [f] = \pm I_{pq} {}^t[f] I_{pq}. \end{aligned}$$

**Quelques conséquences importantes:**

Soit  $f \in O_B(V)$ ,  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base  $B$ -adaptée de  $V$  et  $[f]$  la matrice de  $f$  dans cette base.

On a  $1 = Det(I_{pq} {}^t[f] I_{pq} [f]) = (Det[f])^2$  dès lors

$$\begin{aligned} O_B(V) &= O_B(V)^+ \cup O_B(V)^- \\ O_B(V)^\pm &= \{f \in O_B(V) \mid Det(f) = \pm 1\} \end{aligned}$$

Remarquer que  $O_B(V)^+ \subset O_B(V)$  est un sous-groupe distingué; par contre  $O_B(V)^- \subset O_B(V)$  n'est pas un sous-groupe. (Pourquoi?)

Soit  $O(p, q)$  le sous-groupe de  $Gl_n(\mathbf{R})$  défini par

$$O(p, q) = \{A \in M_n \mathbf{R} \mid I_{pq} {}^t A I_{pq} A = 1_n\}.$$

L'écriture dans une base  $B$ -adaptée montre que l'application

$$End(V) \rightarrow M_n \mathbf{R} : f \mapsto [f]$$

établit une bijection entre  $O_B(V)$  et  $O(p, q)$ .

## Quadriques associées

Soit

$$q : V \rightarrow \mathbf{R} : v \mapsto B(v, v)$$

la forme quadratique associée à  $B$ . Pour un réel  $r \in \mathbf{R}$  l'ensemble

$$\mathcal{Q}_r = \{v \in V \mid q(v) = r\}$$

est appelé une quadrique. Quelque soit  $f \in O_B(V)$  on a  $f(\mathcal{Q}_r) \subset \mathcal{Q}_r$ .

*exemples en dimension 3:* (1)  $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ .  $\mathcal{Q}_1$  est la sphère unité.

(2)  $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ .  $\mathcal{Q}_1$  est un cylindre hyperbolique,  $\mathcal{Q}_0$  est un cône (le cône isotrope en signature  $(2,1)$ ),  $\mathcal{Q}_{-1}$  est un hyperboloïde à deux nappes.

*Intermède de géométrie hyperbolique:* On considère l'hyperboloïde  $\mathcal{Q}_{-1}$  de l'exemple (2).

Soit

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{-1} &= \mathcal{Q}^+ \cup \mathcal{Q}^- \\ \mathcal{Q}^\pm &:= \{(x, y, z) \in \mathcal{Q}_{-1}, \mid \pm z > 0\}\end{aligned}$$

sa décomposition en nappes supérieure et inférieure.

Soient  $n = (0, 0, 1) \in \mathcal{Q}^+$  et  $s = (0, 0, -1) \in \mathcal{Q}^-$  les 'pôles' nord et sud et soit  $P$  le plan 'équatorial' d'équation  $z = 0$ .

Pour un point  $m = (x, y, z) \in \mathcal{Q}^+$ , l'unique point d'intersection de la droite  $(sm)$  et du plan  $P$  est appelé la *projection stéréographique* de  $m$  sur  $P$ . Cette projection est notée  $p(m)$ .

Il est aisé de voir à l'aide d'une représentation paramétrique de la droite  $(sm)$  que

$$p(x, y, z) = \left( \frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}, 0 \right).$$

De plus,  $\|p(x, y, z)\|^2 = \frac{(z-1)}{(z+1)} \leq 1$  et  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z+1} = 1$  montrent que  $p$  est à valeur dans le disque unité ouvert  $D = \{(a, b, 0) \mid a^2 + b^2 < 1\} \subset P$ .

*Propriété:* La projection stéréographique

$$p : \mathcal{Q}^+ \longrightarrow D : m \mapsto p(m)$$

est une bijection (en fait un homéomorphisme).

*Démo:* Il suffit de donner

$$p^{-1} : D \rightarrow \mathcal{Q}^+.$$

Mais  $p^{-1}(a, b, 0)$  est l'unique point d'intersection de la droite passant par les points  $s$ ,  $(a, b, 0)$  et la nappe  $\mathcal{Q}^+$ . Un calcul donne

$$p^{-1}(a, b, 0) = \frac{1}{1 - (a^2 + b^2)}(2a, 2b, 1 + (a^2 + b^2)).$$

Avant de poursuivre, une définition (*pour des rappels euclidiens voir le paragraphe suivant*):

*Cercles orthogonaux du plan:* Deux cercles  $C$  et  $C'$  du plan euclidien sont dits orthogonaux si  $C \cap C' \neq \emptyset$  et si aux points d'intersection les tangentes aux deux cercles sont orthogonales.

Des cercles orthogonaux du plan équatorial  $P$  apparaissent naturellement en considérant l'image par la projection stéréographique  $p$  de certaines courbes coniques tracées sur  $\mathcal{Q}^+$ . Voici comment faire:

Soit  $P'$  un plan vectoriel de  $\mathbf{R}^3$  d'équation  $ax + by + cz = 0$ ,  $a, b, c \in \mathbf{R}$ . On suppose que

$$P' \cap \mathcal{Q}^+ \neq \emptyset.$$

Cette intersection est le lieu des points  $m = (x, y, z)$  qui satisfont le système d'équations

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - z^2 &= -1 \\ax + by + cz &= 0\end{aligned}$$

*Propriété:*

L'image de  $P' \cap \mathcal{Q}^+$  par la projection stéréographique  $p$  est

- un diamètre du disque unité du plan équatorial  $P$  lorsque  $c = 0$
- un arc de cercle orthogonal au bord du disque unité de  $P$  lorsque  $c \neq 0$ .

(*La démo revient à un calcul qui sera fait en TD.*)

Ce sont précisément ces diamètres et ces arcs de cercles qui jouent le rôle de *droites* en géométrie hyperbolique du disque unité  $D$ . Ils sont utilisés par l'artiste néerlandais Escher dans ses représentations (quelque peu fantastiques) de pavages du disque.

## 2 - Rappel sur les Espaces euclidiens

Cette section rassemble les définitions et constructions *de base* de la géométrie vectorielle euclidienne.

### Produit scalaire

Un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel  $V$  est une forme

$$V \times V \longrightarrow \mathbf{R} : (u, v) \mapsto (u | v)$$

bilinéaire (1), symétrique (2), définie positive (3'):

$$\forall x \in V, (x | x) \geq 0 \text{ et } (x | x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Un produit scalaire est donc une forme vérifiant les conditions (1), (2), (3) de la section 1 de signature  $(p = n, 0)$ .

### Espace vectoriel euclidien

Tout espace vectoriel réel  $V$  de dimension finie muni d'un produit scalaire  $(|)$  est appelé un espace euclidien.

Tout espace euclidien de dimension  $n$  est isomorphe à  $\mathbf{R}^n$  muni du produit scalaire

$$((x_1, \dots, x_n) | (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

(Trouvez un isomorphisme!)

### Norme

Une norme sur  $V$  est une application  $V \rightarrow \mathbf{R} : v \mapsto \|v\|$  vérifiant

$$(N1) \forall u \in V, \|u\| \geq 0 \text{ et } \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

$$(N2) \forall u \in V, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|.$$

$$(N3) \forall u, u' \in V, \|u + u'\| \leq \|u\| + \|u'\|.$$

**Proposition** Si  $(V, (|))$  est euclidien, l'application

$$V \rightarrow \mathbf{R} : v \mapsto \|v\| = \sqrt{(v | v)}$$

est une norme.

**Démo:** (N1) et (N2) sont évidentes. Pour vérifier (N3), observer qu'elle est équivalente à l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$(u, u') \leq \|u\| \|u'\|$$

qui se démontre comme suit: Si  $u = 0$ , c'est clair. Si  $u \neq 0$ , l'expression

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \|\lambda u + u'\|^2 \\ &= \lambda^2 \|u\|^2 + 2\lambda(u | u') + \|u'\|^2 \end{aligned}$$



est un polynôme de degré 2 en la variable réelle  $\lambda$  qui est positif. Il a donc au plus une racine réelle, i.e. son discriminant  $4(u | u')^2 - 4 \|u\|^2 \|u'\|^2 \leq 0$ .

### Distance

Une distance sur un ensemble  $X$  est une application  $d : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$  telle que

- (D1)  $\forall x, x' \in X, d(x, x') = d(x', x)$
- (D2)  $\forall x, x' \in X, d(x, x') = 0 \Leftrightarrow x = x'$
- (D3)  $\forall x, x', x'' \in X, d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'')$

**Proposition** Toute norme  $\| \cdot \|$  sur  $V$  induit la distance

$$d_V : V \times V \rightarrow \mathbf{R} : (u, v) \mapsto \|u - v\|$$

### Orthonormalisation de Gram-Schmidt

On dit que deux vecteurs  $u, v \in V$  sont orthogonaux si  $(u | v) = 0$ .

Le théorème de la section 1 appliqué au cas de signature  $(n, 0)$  assure l'existence d'une base  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $V$  telle que

$$(a_i | a_j) = \delta_{ij}$$

Une telle base est dite orthonormée.

D'autre part le caractère défini positif du produit scalaire montre que le cône isotrope est réduit à  $\{0\}$ , ce qui permet une construction itérative (le procédé de Gram-Schmit) d'une base orthormée à partir de toute base de  $V$ :

**Proposition** Soit  $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $V$ . Il existe une base orthonormée  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $V$  telle que pour tout  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  les sous-espaces vectoriels  $\langle b_1, b_2, \dots, b_j \rangle$  et  $\langle a_1, a_2, \dots, a_j \rangle$  coïncident.

**Démo:** Poser  $a'_1 = b_1$ . Supposer  $a'_2, \dots, a'_j$  construits avec  $(a'_k | a'_l) = 0$  pour  $k \neq l$  et  $\langle b_1, \dots, b_j \rangle = \langle a'_1, \dots, a'_j \rangle$ .

Chercher  $a'_{j+1}$  sous la forme

$$a'_{j+1} = b_{j+1} + \lambda_1 a'_1 + \dots + \lambda_j a'_j$$

Les conditions d'orthogonalité  $(a'_{j+1} | a'_k) = 0$  pour  $k \in \{1, \dots, j\}$  donnent

$$\lambda_k = -\frac{(b_{j+1} | a'_k)}{(a'_k | a'_k)}, \quad 1 \leq k \leq j$$

Il reste à normer la base ainsi construite en posant  $a_i = \frac{a'_i}{\sqrt{(a'_i | a'_i)}}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

### Groupe Orthogonal, isométries linéaires

Le groupe orthogonal  $O(V)$  est le groupe des endomorphismes de  $V$  qui préservent le produit scalaire:

$$O(V) = \{f : V \rightarrow V \mid f \text{ linéaire et } (f(u) \mid f(v)) = (u \mid v), \forall u, v \in V\}.$$

Il s'agit donc du groupe  $O_B(V)$  de la section 1 pour  $B$  de signature  $(n, 0)$ .

Le groupe  $O(n, 0) = \{A \in M_n \mathbf{R} \mid {}^t A A = 1_n\}$  de la section 1 est simplement noté  $O_n$ . Par la section 1, l'application  $O(V) \rightarrow O_n : f \mapsto [f]$  qui à  $f \in O(V)$  associe sa matrice  $[f]$  dans une base orthonormée est une bijection.

*Remarque:* Si  $\lambda$  est une valeur propre réelle d'un endomorphisme orthogonal  $f \in O(V)$  alors  $\lambda \in \{+1, -1\}$ . En effet: Pour  $u \in V \setminus \{0\}$  tel que  $f(u) = \lambda u$  on a  $(u \mid u) = (f(u) \mid f(u)) = (\lambda u \mid \lambda u) = \lambda^2 (u \mid u)$ . Puisque  $(u \mid u) \neq 0$  il vient  $\lambda^2 = 1$ .

Une application linéaire  $f : V \rightarrow V$  est une isométrie si elle préserve la distance  $d_V$ :

$$\forall u, v \in V, d_V(f(u), f(v)) = d_V(u, v)$$

L'ensemble  $Isom(V)$  des isométries linéaires est un sous-groupe de  $Gl(V)$ .

On vérifie aisément à l'aide de l'identité de polarisation

$$4(u \mid v) = (u + v \mid u + v) - (u - v \mid u - v)$$

que

$$Isom(V) = O(V).$$

### 3 - Symétries orthogonales, engendrement de $O(V)$ par les réflexions

Soit  $(V, (\mid))$  un espace euclidien de dimension  $n$ .

Deux sous-espaces vectoriels  $W, W' \subset V$  sont dits orthogonaux (on écrit  $W \perp W'$ ) si  $(w \mid w') = 0, \forall w \in W, w' \in W'$ .

**Somme directe orthogonale:** Soit  $W \subset V$  un sous-espace vectoriel. L'ensemble

$$W^\perp = \{u \in V \mid (u \mid w) = 0, \forall w \in W\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $V$  et

$$V = W \oplus W^\perp$$

**Démo:** Soit  $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $V$  telle que  $(b_i)_{1 \leq i \leq \dim W}$  soit une base de  $W$  et soit  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$  la base orthonormée obtenue en appliquant l'orthonormalisation de Gram-Schmidt à  $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ . On a

$$W = \langle b_1, \dots, b_{\dim W} \rangle = \langle a_1, \dots, a_{\dim W} \rangle$$

$$V = W \oplus \langle a_{\dim W+1}, \dots, a_n \rangle$$

Pour conclure il suffit d'observer que cette décomposition en somme directe est celle de l'énoncé. En effet,

$$\begin{aligned} u = \sum_{i=1}^n x_i a_i \in W^\perp &\Leftrightarrow (u | a_k) = 0, \forall k \in \{1, \dots, \dim W\} \\ &\Leftrightarrow x_k = 0, \forall k \in \{1, \dots, \dim W\} \\ &\Leftrightarrow u \in \langle a_{\dim W+1}, \dots, a_n \rangle \end{aligned}$$

*Exercice:* Si  $W, W' \subset V$  sont deux sous-espaces vectoriels, on a  $(W + W')^\perp = W^\perp \cap W'^\perp$ .

## Symétries orthogonales

Soit  $s : V \rightarrow V$  une symétrie vectorielle ( $s$  est linéaire et  $s \circ s = Id_V$ ) et soit

$$V = V_+^s \oplus V_-^s$$

la décomposition de  $V$  en sous-espaces propres  $V_\pm^s = \{v \in V \mid s(v) = \pm v\}$ .

**Lemme**  $s \in O(V) \Leftrightarrow V_+^{s^\perp} = V_-^s$

**Démo:** Dans un sens,  $s \in O(V) \Leftrightarrow (s(u) | s(v)) = (u, v), \forall u, v \in V \Rightarrow -(u_+ | u_-) = (s(u_+) | s(u_-)) = (u_+ | u_-), \forall u_\pm \in V_\pm^s \Rightarrow V_-^s \subset V_+^{s^\perp}$  d'où l'égalité car ils sont de même dimension.

Dans l'autre sens, écrire  $u = u_+ + u_-$  et  $v = v_+ + v_-$  avec  $u_\pm, v_\pm \in V_\pm^s$ . On a  $(s(u) | s(v)) = (u_+ - u_- | v_+ - v_-) = (u_+ | v_+) + (u_- | v_-) = (u_+ + u_- | v_+ + v_-) = (u | v)$ .

**Réflexions** Une réflexion est une symétrie orthogonale  $s \in O(V)$  pour laquelle  $\dim V_+^s = n - 1$ .

Remarque: le déterminant d'une symétrie  $s$  vaut  $(-1)^{\dim V_-^s}$ .

Le déterminant d'une réflexion vaut donc  $-1$ .

**Lemme** Soient  $f \in O(V)$ . Pour tout sous-espace  $W \subset V$ ,  $f(W) \subset W \Rightarrow f(W^\perp) \subset W^\perp$ .

**Démo:**  $f \in O(V) \Rightarrow f$  est bijective  $\Rightarrow f(W) = W$ . Soient  $w \in W, w' \in W^\perp$  et  $u \in W$  tel que  $w = f(u)$ . On a  $0 = (u | w') = (f(u) | f(w')) = (w | f(w'))$ , i.e.  $f(W^\perp) \subset W^\perp$ .

**Théorème** (Les réflexions engendrent le groupe orthogonal)

Si  $f \in O(V)$  il existe  $p(\leq n)$  réflexions  $s_1, \dots, s_p \in O(V)$  telles que  $f = s_1 \circ \dots \circ s_p$ .

**Démo:** On procède par récurrence sur  $\dim V = n$ . Si  $n = 1$  alors  $V \simeq \mathbf{R}$  muni du produit scalaire  $(x | x') = xx'$ . Un endo  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} : x \mapsto ax$  est orthogonal ssi  $a \in \{+1, -1\}$ , i.e.  $O(\mathbf{R}) = \{Id, -Id\}$ . L'identité est composée de 0 réflexion et  $-Id$  est une réflexion.

On suppose la propriété vraie pour tout espace euclidien  $V$  de dimension  $\leq n - 1$ . Soit alors  $f \in O(V) \setminus \{Id_V\}$  et  $\dim V = n$ .

*Etape 1:* Puisque  $f \neq Id_V$ , il existe  $v \in V$  tel que  $f(v) \neq v$ . Considérons la décomposition

$$V = \langle v - f(v) \rangle \oplus \langle v - f(v) \rangle^\perp$$

et la réflexion  $s$  telle que  $V_+^s = \langle v - f(v) \rangle^\perp$  et dès lors  $V_-^s = \langle v - f(v) \rangle$ . Observer que  $s(v) = f(v)$  et dès lors

$$v = s^{-1} \circ f(v) = s \circ f(v) \quad (\text{puisque } s^{-1} = s).$$

*Etape 2:* Soit

$$V = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^\perp$$

La transformation orthogonale  $s \circ f$  fixe  $v$  et donc, par le lemme, elle stabilise son supplémentaire orthogonal, i.e.

$$s \circ f(\langle v \rangle^\perp) \subset \langle v \rangle^\perp.$$

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à la restriction  $(s \circ f)|_{\langle v \rangle^\perp} \in O(\langle v \rangle^\perp)$ . En clair, on peut trouver  $k$  réflexions  $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in O(\langle v \rangle^\perp)$  avec  $k \leq n - 1$  telles que

$$(s \circ f)|_{\langle v \rangle^\perp} = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_k.$$

*Etape 3:* Pour conclure on va relever les réflexions  $\sigma_i$  en des réflexions  $s_i \in O(V)$ . Il suffit de définir  $s_i$  sur les facteurs de la somme directe  $V = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^\perp$  comme suit:

$$s_i(v) = v \text{ et } s_i(w) = \sigma_i(w), \forall w \in \langle v \rangle^\perp$$

On a  $s_i \circ s_i = Id_V$  car  $\sigma_i \circ \sigma_i = Id_{\langle v \rangle^\perp}$ .

D'autre part  $V_+^{s_i} = \langle v \rangle \oplus (\langle v \rangle^\perp)^{\sigma_i}$  est un hyperplan et  $V_-^{s_i} = (\langle v \rangle^\perp)^{\sigma_i}$ . Ces sous-espaces sont orthogonaux, dès lors  $s_i \in O(V)$ . Enfin observer que  $s \circ f = s_1 \circ \dots \circ s_k$  dès lors

$$f = s \circ s_1 \circ \dots \circ s_k.$$

C'est l'énoncé à la numérotation près.

#### **4 - Formes normales matricielles**

Pour rappel (cf section 1)  $O^\pm(V) = \{f \in O(V) \mid \text{Det}(f) = \pm 1\}$ .

##### **Le cas du plan euclidien**

Soit  $(V, (\cdot, \cdot))$  un espace euclidien de dimension 2.

La matrice de  $f \in O(V)$  dans toute base orthonormée de  $V$  s'écrit si  $f \in O^+(V)$ :

$$[f] = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

si  $f \in O^-(V)$ :

$$[f] = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

pour des réels  $a, b$  tels que  $a^2 + b^2 = 1$ .

*Démo:* Soit  $(a_1, a_2)$  une base orthonormée.

Ecrivons  $f(a_1) = a a_1 + b a_2$  et  $f(a_2) = a' a_1 + b' a_2$ . Les conditions  $(f(a_i) | f(a_j)) = \delta_{ij}$  s'écrivent  $a^2 + b^2 = 1 = a'^2 + b'^2$  et  $aa' + bb' = 0$ . Ces équations admettent deux solutions  $(a' = -b, b' = a)$  et  $(a' = b, b' = -a)$ . Dans le premier cas  $Det(f) = +1$  et dans le second  $Det(f) = -1$ .

Pour  $f \in O^+(V)$  en choisissant  $\theta \in \mathbf{R}$  tel que  $a = \cos(\theta)$  et  $b = \sin(\theta)$ , il vient

$$[f] = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

C'est la matrice d'une rotation d'angle  $\theta$ . (Pour une étude plus précise de la notion d'angle voir *infra*.)

Pour  $f \in O^-(V)$ ,  $f \circ f = Id_V$  et le polynôme caractéristique de  $f$  est  $x^2 - 1$ . Dès lors

$$V = V_+^f \oplus V_-^f$$

et  $f$  est une réflexion de droite fixe  $V_+^f$ . Dans toute base  $(b_+, b_-) \in V_+^f \times V_-^f$  on a

$$[f] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On retiendra: Si  $\dim(V) = 2$ ,  $f \in O(V)$  est une rotation ssi  $Det(f) = 1$  et  $f$  est une réflexion ssi  $Det(f) = -1$ .

L'assertion suivante est laissée au lecteur:

*Tout endomorphisme symétrique  $f$  du plan euclidien est de spectre réel et diagonalisable dans une base orthonormée.*

### Le cas de dimension $n \geq 2$

**Lemme:** Soit  $V$  un espace vectoriel réel et  $f : V \rightarrow V$  un endomorphisme. Il existe un sous-espace  $W \subset V$  de dimension au plus 2 tel que  $f(W) \subset W$ .

**Démo:** Le polynôme caractéristique  $\chi_f(X) \in \mathbf{R}[X]$ , dès lors ses racines sont soit réelles, soit viennent par paire de racines complexes conjuguées. Il y a deux cas

- (1)  $\chi_f$  a une racine réelle  $\lambda$ . Poser alors  $W = \langle v_\lambda \rangle$  où  $f(v_\lambda) = \lambda v_\lambda$ .
- (2)  $\chi_f$  n'a pas de racine réelle. Soit alors

$$\chi_f(X) = p_1(X) \dots p_r(X), \quad n = 2r$$

la décomposition de  $\chi_f$  en polynômes irréductibles de degré 2 :  $p_i(X) = (X - \lambda_i)(X - \bar{\lambda}_i)$ . Par Cayley-Hamilton,

$$\chi_f(f) = p_1(f) \circ p_2(f) \circ \dots \circ p_r(f) = 0.$$

Si pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$  l'endomorphisme  $p_i(f)$  était injectif alors  $\chi_f(f)$  aussi, en particulier il ne serait pas nul. Il doit donc exister un polynôme  $p_i$  tel que  $p_i(f)$  ne soit pas injectif. Soit alors  $v \in V$  non nul tel que  $p_i(f)(v) = 0$ . En développant on a

$$f^2(v) - (\lambda_i + \bar{\lambda}_i)f(v) + |\lambda_i|^2 v = 0$$

et le sous-espace

$$W = \langle v, f(v) \rangle$$

est un sous-espace  $f$ -stable de dimension 2.

**Proposition** Si  $f$  est un endomorphisme symétrique ou orthogonal d'un espace euclidien  $V$ , il existe une décomposition

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_r$$

en sous-espaces  $f$ -stables de dimension au plus 2 deux à deux orthogonaux i.e. tels que  $i \neq j \Rightarrow W_i \perp W_j$ .

**Démo:** Par récurrence sur  $\dim(V) = n$ . Pour  $n = 1$  c'est trivial. Montrons vrai pour  $n \Rightarrow$  vrai pour  $n + 1$ . Soit  $W \subset V$  un sous-espace  $f$ -stable de dimension au plus 2 comme dans le lemme. On sait que si  $f \in O(V)$  alors  $f(W) \subset W \Rightarrow f(W^\perp) \subset W^\perp$ ; il est facile de voir qu'il en est de même si  $f$  est symétrique. On a donc une décomposition en somme directe  $V = W \oplus W^\perp$  de sous-espaces orthogonaux  $f$ -stables. Pour conclure il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence à la restriction  $f|_{W^\perp}$ .

**Corollaire** (forme normale matricielle)

- (1) Si  $f$  est symétrique,  $f$  est à spectre réel et il existe une base orthonormée constituée de vecteurs propres de  $f$ .
- (2) Si  $f \in O(V)$  il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de  $f$  s'écrit

$$[f] = \begin{pmatrix} 1_{p_+} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1_{p_-} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & R(\theta_r) \end{pmatrix}$$

où  $p_+ + p_- + 2r = \dim(V) = n$  et  $R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$ .

Ceci résulte du cas  $n = 2$  et de la proposition qui précède.

**Forme du corollaire pour une matrice:** La matrice  $P$  de passage d'une base orthonormée  $\mathcal{A}$  à une autre base orthonormée  $\mathcal{A}'$  de  $V$  appartient à  $O_n$ . En effet: Soit  $h$  l'endomorphisme de  $V$  dont la matrice  $[h]$  dans la base  $\mathcal{A}$  vaut  $P$ .  $h$  transforme la base  $\mathcal{A}$  en la base  $\mathcal{A}'$  et donc  $h \in O(V)$  et dès lors sa matrice  $[h] \in O_n$ .

On peut réexprimer le corollaire en termes matriciels comme suit:  $\forall M \in O_n$ , il existe  $P \in O_n$  telle que

$$M = P \begin{pmatrix} 1_{p_+} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1_{p_-} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R(\theta_r) \end{pmatrix} {}^t P.$$

(Pour rappel  $P \in O_n \Leftrightarrow {}^t P = P^{-1}$ .)

### Description en dimension 3

On convient de ne pas écrire les 0 dans les matrices.

(1)  $f \in O^+(V) \setminus \{Id_V\}$ . On a  $1 = Det(f) = (-1)^{p_-}$  dès lors  $p_- = 0$  ou  $p_- = 2$ .

Si  $p_- = 0$ ,  $[f] = \begin{pmatrix} 1 & \\ & R(\theta) \end{pmatrix}$ .

Si  $p_- = 2$ ,  $[f] = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & R(\pi) \end{pmatrix}$ .

Il s'agit donc d'une rotation autour d'un axe dans un plan orthogonal à cet axe.

(2)  $f \in O^-(V)$ . On a  $-1 = Det(f) = (-1)^{p_-} \Rightarrow p_- = 1$  ou  $p_- = 3$ .

Si  $p_- = 1$ ,  $[f] = \begin{pmatrix} -1 & \\ & R(\theta) \end{pmatrix}$  avec éventuellement  $\theta \equiv 0[2\pi]$ .

Si  $p_- = 3$ ,  $[f] = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \\ & R(\pi) \end{pmatrix}$ .

Il s'agit de la composée d'une réflexion  $s$  de matrice  $[s] = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1_2 \end{pmatrix}$  et d'une rotation d'axe  $V_-^s$  dans le plan fixe de la réflexion.

### 5 - Questions de connexité par arcs

Soit  $(V, (\cdot | \cdot))$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $d_V : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$  la distance induite par le produit scalaire (cf section 2).

Pour rappel une application  $f : V \rightarrow V'$  entre espaces euclidiens est dite continue au point  $u \in V$  si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in V, d_V(u, x) < \eta \Rightarrow d_{V'}(f(x), f(u)) < \epsilon$$

$f$  est dite continue sur  $V$  si elle est continue en tout point  $u \in V$ .

### Arcs et connexité par arcs

Un arc dans l'espace  $V$  est une application continue

$$\alpha : [0, 1] \subset \mathbf{R} \longrightarrow V.$$

Une partie  $P \subset V$  est dite connexe par arcs si quels que soient  $p, q \in P$  il existe un arc  $\alpha : [0, 1] \rightarrow P \subset V$  tel que  $p = \alpha(0)$  et  $q = \alpha(1)$ .

*Composition:* Si  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow V$  sont deux arcs avec  $\alpha(1) = \beta(0)$ , on peut les composer par concaténation comme suit

$$\begin{aligned}\alpha \star \beta(t) &= \alpha(t) \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ &= \beta(2t - 1) \text{ si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1\end{aligned}$$

*Arc inverse:*  $\overleftarrow{\alpha}(t) = \alpha(1 - t)$

Soit  $P \subset V$  et  $p \in P$ .  $P$  est connexe par arcs ssi quel que soit  $q \in P$  il existe un arc  $\alpha_{pq} : [0, 1] \rightarrow P$  tel que  $\alpha_{pq}(0) = p$  et  $\alpha_{pq}(1) = q$ .

*Remarque:* Un lacet au point  $v \in V$  est un arc  $\alpha$  tel que  $\alpha(0) = v = \alpha(1)$ .

**$M_n(\mathbf{R})$  est euclidien**

L'ensemble  $M_n(\mathbf{R})$  des matrices carrées réelles de taille  $n$  est isomorphe à  $\mathbf{R}^{n^2}$  et dès lors euclidien pour le produit scalaire usuel: Si  $A = (a_{ij})$  et  $A' = (a'_{ij})$ ,

$$(A | A') = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} a'_{ij}.$$

Remarquer que

$$(A | A') = tr({}^t A A').$$



Il s'ensuit que  $M_n(\mathbf{R})$  est naturellement un espace métrique et dès lors l'ensemble des matrices inversibles  $Gl_n(\mathbf{R}) \subset M_n(\mathbf{R})$  ainsi que l'ensemble des matrices orthogonales  $O_n \subset M_n(\mathbf{R})$  sont munis d'une distance.

*Raffinements:* Il se fait que  $Gl_n\mathbf{R}$  est ouvert dans  $M_n\mathbf{R}$  tandis que  $O_n \subset M_n\mathbf{R}$  est un fermé borné, i.e. un compact. Toutefois nous n'utiliserons pas ces propriétés (cf M1 l'an prochain).

### Théorème

$O_n^\pm = \{M \in O_n \mid Det(M) = \pm 1\} \subset M_n(\mathbf{R})$  sont des espaces métriques connexes par arcs.

**Démo:** On utilise la forme normale matricielle de la section 4. Soit  $M \in O_n^+$  et

$$M = P \begin{pmatrix} 1_{p_+} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1_{p_-} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R(\theta_r) \end{pmatrix} {}^tP,$$

sa forme normale.

on a

$$Det(M) = +1 = (-1)^{p_-} DetR(\theta_1) \cdots DetR(\theta_r) = (-1)^{p_-}$$

Il s'ensuit que  $p_- \in 2\mathbf{N}$ . On peut donc écrire la matrice  $-1_{p_-}$  qui apparait dans la forme normale en regroupant les  $-1$  deux par deux:

$$-1_{p_-} = \begin{pmatrix} -1_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1_2 \end{pmatrix}$$

Observer ensuite que

$$-1_2 = \begin{pmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix} = R(\pi).$$

Considérer le chemin  $M : [0, 1] \rightarrow O_n^+ : t \mapsto M(t)$  défini par

$$M(t) = P \begin{pmatrix} 1_{p_+} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & R(t\pi) & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & R(t\pi) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & R(t\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & R(t\theta_r) \end{pmatrix} {}^tP.$$

On a  $\forall t \in [0, 1], M(t) \in O_n^+$  et  $M(0) = 1_n, M(1) = M$ . Enfin l'arc  $M(t)$  est continu puisque chaque composante est continue (en fait de classe  $C^\infty$ ).

Il reste à vérifier la connexité par arcs de  $O_n^-, n \geq 2$ . Soit  $Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1_{n-1} \end{pmatrix}$ . Clairement  $Q \in O_n^-$  et  $Q^2 = 1_n$ . L'application

$$O_n^- \rightarrow O_n^+ : M_- \mapsto QM_-$$

est un homéomorphisme de réciproque  $M_+ \mapsto QM_+$ . Dès lors si  $\Gamma_+ : [0, 1] \rightarrow O_n^+$  est un arc connectant  $QM_-$  à  $1_n$ , l'arc  $\Gamma_- : [0, 1] \rightarrow O_n^- : t \mapsto Q\Gamma_+(t)$  connecte  $M_-$  à  $Q$ .

*Remarques:* Pour  $n = 2, 3$ , la connexité par arcs des groupes de rotations  $O_2^+$  et  $O_3^+$  est biensûr intuitive: *on peut continument faire pivoter un objet autour d'un axe.*

On vient de voir que le groupe  $O_n$  a deux composantes connexes par arcs homéomorphes. Par contraste, le groupe unitaire  $U_n$  des matrices  $U$  de type  $n \times n$  à coefficients complexes vérifiant  ${}^t\bar{U}U = I_n$  est connexe par arcs. Ici  $\bar{U}$  désigne la conjugaison complexe.

**Application:** Pour  $n \geq 2$ , la sphère

$$S_{n-1} = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^n \mid \|\vec{x}\| = 1\}$$

est un espace métrique connexe par arcs.

**Démo:**

La sphère  $S_{n-1}$  est munie de la distance induite de  $\mathbf{R}^n$ .

Pour  $n = 2$ , c'est le cercle de centre  $(0, 0)$  de  $\mathbf{R}^2$ . C'est donc un arc.

Soit  $n > 2$  et  $\vec{x} \in S_{n-1}$ . On va montrer qu'il existe un arc sur la sphère connectant  $\vec{x}$  au premier vecteur  $\vec{e}_1 \in S_{n-1}$  de la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ .

Puisque  $\vec{x} \neq \vec{0}$  (il est de norme 1), il existe une (en fait une infinité de) base(s) de  $\mathbf{R}^n$  de premier vecteur  $\vec{x}$ . En appliquant Gram-Schmidt à cette base on obtient une base orthonormée  $A$  de premier vecteur  $\vec{x}$ .

On sait que la matrice  $P$  de passage de la base canonique  $(\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$  à la base  $A$  appartient à  $O_n$ . Quitte à permuter les deux derniers vecteurs de la base  $A$ , on peut supposer que  $P \in O_n^+$ .

Puisque  $O_n^+$  est connexe par arcs, il existe un arc

$$\Gamma : [0, 1] \longrightarrow O_n^+$$

tel que  $\Gamma(0) = 1_n$  et  $\Gamma(1) = P$ .

On définit alors un arc

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$$

en posant

$$\gamma(t) = \Gamma(t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il reste à vérifier que  $\gamma$  convient: Puisque  $\Gamma(t) \in O_n$ , on a bien  $\gamma(t) \in S_{n-1}$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Enfin  $\gamma(0) = \vec{e}_1$  et  $\gamma(1) = P \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x}$ .

## 6 - Orientation d'un espace euclidien

Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $V$  et  $P = [Id_V, \mathcal{B}', \mathcal{B}] \in Gl_n \mathbf{R}$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ . On définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de  $V$  en posant  $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$  ssi  $Det(P) > 0$ .

Il y a deux classes d'équivalence et chacune d'elle est appelée *une orientation* de  $V$ .

*Choisir une orientation c'est donc choisir une base.*

*Remarque importante:* L'orientation est liée au fait que  $\mathbf{R}^*$  a deux composantes connexes  $\mathbf{R}_{>0}$  et  $\mathbf{R}_{<0}$ . On ne peut pas orienter un espace complexe car  $\mathbf{C}^*$  est connexe par arcs.

### **Produit mixte, produit vectoriel**

Fixons l'orientation en choisissant une base orthonormée  $\mathcal{A} = (a_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $V$  (si  $V = \mathbf{R}^n$ , on prendra souvent la base canonique). Une base sera dite directe si elle appartient à la classe de  $\mathcal{A}$ .

Soit  $X = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in V^n$  un  $n$ -uplet d'éléments de  $V$  et, par abus de langage, notons  $[Id_V, X, \mathcal{A}]$  la matrice des composantes des vecteurs  $v_1, \dots, v_n$  dans la base  $\mathcal{A}$ .

*Observation:* Si  $\mathcal{A}'$  est une base orthonormée directe

$$Det[Id_V, X, \mathcal{A}'] = Det[Id_V, X, \mathcal{A}]$$

En effet

$$[Id_V, X, \mathcal{A}'] = [Id_V, \mathcal{A}, \mathcal{A}'] [Id_V, X, \mathcal{A}]$$

et la matrice de passage  $[Id_V, \mathcal{A}, \mathcal{A}'] \in O_n^+$  et dès lors son déterminant vaut 1.

Le réel

$$[v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n] = Det[Id_V, X, \mathcal{A}]$$

est donc indépendant du choix de la base orthonormée dans une classe d'orientation fixée. Ce réel s'appelle le produit mixte des  $v_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . C'est l'unique forme  $n$ -linéaire alternée

$$\phi : V^n \longrightarrow \mathbf{R}$$

telle que  $\phi(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ .

Pour rappel, l'application  $\mathcal{B} : V \rightarrow V^* : u \mapsto (u | \cdot)$  est un isomorphisme, i.e. pour toute application linéaire  $\alpha : V \rightarrow \mathbf{R}$  il existe un unique vecteur  $u_\alpha \in V$  tel que

$$\alpha(v) = (u_\alpha | v), \forall v \in V \quad (\star)$$

Pour  $v_1, \dots, v_{n-1} \in V$  fixés, l'application

$$\alpha : V \rightarrow \mathbf{R} : v \mapsto [v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v]$$

est linéaire en  $v$ . L'unique vecteur  $u_\alpha \in V$  satisfaisant  $(\star)$  est noté  $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1}$  et est appelé le *produit vectoriel* de  $v_1, \dots, v_{n-1}$ .

*Remarque:* Si  $(v_1, \dots, v_{n-1})$  est libre et  $v \notin \langle v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \rangle$ , alors  $(v_1 \wedge v_2 \dots \wedge v_{n-1} \mid v) = [v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v] \neq 0$ . Par contre,  $(v_1 \wedge v_2 \dots \wedge v_{n-1} \mid v_j) = 0$  pour tout  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ . Dès lors  $\langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle^\perp = \langle v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \rangle$ .

*Exemple:* Soit  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  la base canonique de  $\mathbf{R}^3$ . On a  $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3$ ,  $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$  (observer la permutation cyclique) et  $\vec{x} \wedge \vec{y} = -\vec{y} \wedge \vec{x}$  pour tout  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^3$ . C'est le produit vectoriel *usuel* dans l'espace.

Pour d'autres propriétés cf TD.

## 7- Espace affine euclidien, groupe des isométries affines

Un espace affine  $(X, V)$  réel de dimension finie  $n$  est appelé euclidien si  $(V, (|\cdot|))$  est un espace vectoriel euclidien.

L'application

$$d : X \times X \rightarrow \mathbf{R} : (x, y) \mapsto \sqrt{(\overrightarrow{xy} \mid \overrightarrow{xy})}$$

est (on le sait cf Chapitre 1) une distance sur  $X$ .

### Isométries affines

Si  $(X, V)$  et  $(X', V')$  sont affines euclidiens une application affine  $f : X \rightarrow X'$  est appelée une isométrie si  $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$ ,  $\forall x, y \in X$ .

Il est facile de voir que  $f$  est une isométrie ssi  $L_f : V \rightarrow V'$  est une isométrie vectorielle. En particulier, une application affine  $f : X \rightarrow X$  est une isométrie ssi  $L_f \in O(V)$ .

**Proposition:** L'ensemble  $Is(X)$  des isométries affines de  $X$  est un sous-groupe du groupe affine  $GA(X)$ .  $Is(X)$  est en bijection avec l'ensemble  $V \times O(V)$ .

**Démo:** Le fait que  $Is(X)$  est un sous-groupe résulte de  $f \in Is(X) \Leftrightarrow L_f \in O(V)$ .

Pour la bijection, on sait (cf Chapitre 1) que pour tout point  $o \in X$  l'application

$$\sigma : GA(X) \rightarrow V \times Gl(V) : f \mapsto (\overrightarrow{of(o)}, L_f)$$

est une bijection. La bijection recherchée est simplement la restriction de  $\sigma$  aux isométries affines i.e.

$$\sigma_{Is(X)} : Is(X) \rightarrow V \times O(V)$$

Comme pour le groupe orthogonal on considère

$$Is^\pm(X) = \{f \in Is(X) \mid Det L_f = \pm 1\}$$

On a  $Is(X) = Is^+(X) \cup Is^-(X)$ .  $Is^+(X) \subset Is(X)$  est un sous-groupe distingué appelé le *groupe des déplacements* de  $X$  tandis que  $Is^-(X) \subset Is(X)$ , appelé l'ensemble des *antidéplacements* de  $X$ , n'est pas un sous-groupe.

### Connexité par arcs

*Remarques:* Pour les étudiants peu familiers avec les notions topologiques, il n'est pas indispensable (pour ce cours) de détailler la preuve de la connexité par arcs de  $Is^\pm(X)$  qui suit.

Remarquer toutefois que celle-ci reflète une propriété bien naturelle de nos déplacements quotidiens: on peut les faire et les défaire continument.

Quelques observations générales:

(1) Si  $(X, d_X)$  est un espace métrique,  $Y$  un ensemble et  $\phi : Y \rightarrow X$  est une bijection, alors l'application

$$d_Y : Y \times Y \rightarrow \mathbf{R} : (y, y') \mapsto d_X(\phi(y), \phi(y'))$$

est une distance sur  $Y$ .

(2) Si  $(X, d_X)$  et  $(X', d_{X'})$  sont des espaces métriques alors  $X \times X'$  aussi pour la distance

$$d : (X \times X') \times (X \times X') \rightarrow \mathbf{R} : ((x, x'), (y, y')) \mapsto \sqrt{d_X^2(x, y) + d_{X'}^2(x', y')}$$

Si  $X$  et  $X'$  sont connexes par arcs, alors  $X \times X'$  aussi. En effet, si  $\gamma$  est un arc dans  $X$  joignant  $a$  à  $b$  et  $\gamma'$  est un arc dans  $X'$  joignant  $a'$  à  $b'$ , l'application

$$[0, 1] \rightarrow X \times X' : t \mapsto (\gamma(t), \gamma'(t))$$

est un arc connectant  $(a, a')$  à  $(b, b')$ .

(3) Choisissons une base orthonormée  $A$  de  $V$ . Puisque l'application qui à  $f \in End(V)$  associe la matrice  $[f]$  dans la base  $A$  est une bijection de  $End(V)$  sur  $M_n \mathbf{R}$ , par (1)  $End(V)$  est muni d'une distance. Dès lors  $O(V) \subset End(V)$  l'est aussi. Par (2), le produit  $V \times O(V)$  est métrique. Enfin, puisque  $Is(X)$  est en bijection avec  $V \times O(V)$ ,  $Is(X)$  admet lui aussi une distance et dès lors  $Is^\pm(X) \subset Is(X)$  aussi.

**Proposition** Les espaces métriques  $Is^\pm(X)$  sont connexes par arcs.

**Démo:** Par construction,  $\sigma : Is(X)^\pm \rightarrow V \times O(V)^\pm$  est une isométrie. D'autre part,  $V$  est un espace vectoriel réel donc il est convexe et donc connexe par arcs et  $O^\pm(V)$  sont connexes par arcs car ils sont en bijection avec  $O_n^\pm$  qui sont connexes par arcs. Dès lors  $V \times O^\pm(V)$  est connexe par arcs et donc  $Is^\pm(X)$  aussi.

### Décomposition des isométries affines

**Théorème:** Pour toute  $f \in Is(X)$  il existe un unique  $\vec{u} \in V$  et une unique isométrie affine  $g \in Is(X)$  admettant au moins un point fixe, tels que

$$f = \tau_{\vec{u}} \circ g = g \circ \tau_{\vec{u}}.$$

De plus  $f$  admet un point fixe ssi  $\vec{u} = \vec{0}$ .

**Démo:** On commence par quelques observations:

(1)  $f = \tau_{\vec{u}} \circ g \Rightarrow L_f = L_g$ .

(2) On sait que  $g \circ \tau_{\vec{u}} \circ g^{-1} = \tau_{L_g(\vec{u})}$ . Dès lors  $g \circ \tau_{\vec{u}} = \tau_{\vec{u}} \circ g \Rightarrow \vec{u} \in \text{Ker}(L_g - Id_V) = \text{Ker}(L_f - Id_V)$ .

(3) Si  $a$  est un point fixe de  $g$ ,  $f(a) = (\tau_{\vec{u}} \circ g)(a) = g(a) + \vec{u} = a + \vec{u}$ , i.e.  $\overrightarrow{af(a)} = \vec{u}$ .

(4) Quel que soit  $f \in Is(X)$ ,  $\text{Im}(L_f - Id_V) = \text{Ker}(L_f - Id_V)^\perp$ .

Vérifions cette affirmation: Soit  $v \in \text{Ker}(L_f - Id_V)$  et  $v' = L_f(w) - w \in \text{Im}(L_f - Id_V)$ . On a  $(v | v') = (v | L_f(w)) - (v | w) = (L_f(v) | L_f(w)) - (v | w) = 0$  puisque  $L_f \in O(V)$ . Dès lors  $\text{Im}(L_f - Id_V) \subset \text{Ker}(L_f - Id_V)^\perp$ . Enfin, le thm du rang appliqué à  $L_f - Id_V$  montre que ces deux sous-espaces ont même dimension.

En particulier,

$$\begin{aligned} V &= \text{Ker}(L_f - Id_V) \oplus \text{Ker}(L_f - Id_V)^\perp \\ &= \text{Ker}(L_f - Id_V) \oplus \text{Im}(L_f - Id_V) \end{aligned} \quad (\star)$$

Au travail maintenant: Existence: Par (2) et (3), on cherche  $a \in X$  tel que  $\overrightarrow{af(a)} \in \text{Ker}(L_f - Id_V)$ . Pour ce faire on choisit un point  $m \in X$  arbitraire et on décompose  $\overrightarrow{mf(m)}$  comme en (4  $\star$ ):

$$\overrightarrow{mf(m)} = \vec{u} + L_f(\vec{w}) - \vec{w} \in V, \vec{u} \in \text{Ker}(L_f - Id_V), \vec{w} \in V$$

On a  $f(m) = m + \overrightarrow{mf(m)}$  d'où  $f(m - \vec{w}) = f(m) - L_f(\vec{w}) = m - \vec{w} + \vec{u}$ . Dès lors  $a = m - \vec{w}$  convient.

Posons  $g = \tau_{-\vec{u}} \circ f$ . On a  $L_g = L_f \in O(V)$  dès lors  $g \in Is(X)$ ; aussi  $g(a) = a$  et  $L_g \vec{u} = L_f \vec{u} = \vec{u} \Rightarrow g \circ \tau_{\vec{u}} = \tau_{\vec{u}} \circ g$ .

Unicité: Supposons  $f = \tau_{\vec{u}} \circ g = \tau_{\vec{v}} \circ h$  avec  $\vec{u} = \overrightarrow{af(a)}, \vec{v} = \overrightarrow{bf(b)} \in \text{Ker}(L_f - Id_V), g(a) = a, h(b) = b$ . Alors

$$\begin{aligned} \vec{u} - \vec{v} &= \overrightarrow{af(a)} - \overrightarrow{bf(b)} \\ &= \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bf(a)} + \overrightarrow{f(b)b} \\ &= \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{f(b)f(a)} \\ &= (Id_V - L_f)(\overrightarrow{ab}) \end{aligned}$$

dès lors  $\vec{u} - \vec{v} \in \text{Ker}(L_f - Id_V) \cap \text{Im}(L_f - Id_V) = \{\vec{0}\}$ . D'où  $\vec{u} = \vec{v}$  et dès lors  $g = h$ .

Reste à étudier l'existence de points fixes de  $f$ : Si  $\vec{u} = \vec{0}$ , alors  $f = g$  et admet donc un point fixe.

Réciproquement: si  $f$  admet un point fixe  $a'$ ,  $\overrightarrow{a'f(a')} = \vec{0} \in \text{Ker}(L_f - Id_V)$ . On peut donc choisir  $a'$  dans la construction d'existence auquel cas  $\vec{u} = \vec{0}$ !

### Isométries affines en dimensions 2 et 3.

Soit  $(X, V)$  un espace affine euclidien. Le théorème qui précède ainsi que la forme normale des endomorphismes orthogonaux permet de faire la liste des types d'isométries de  $X$  lorsque  $\dim(X) = 2, 3$ .

Voici cette liste (pour les détails cf TD)

$n = 2$  :

$Is^+(X)$ : sans point fixe: les translations; avec point fixe: les rotations autour de ce point.

$Is^-(X)$ : avec point fixe: les réflexions affines qui sont les symétries affines  $s$  telles que  $L_s$  soit une réflexion linéaire; sans point fixe: les réflexions (ou symétries) glissées qui sont la composée d'une réflexion affine  $s$  et d'une translation  $\tau_{\vec{u}}$  de vecteur  $\vec{u} \in Ker(L_s - Id_V) \setminus \{\vec{0}\}$ .

$n = 3$  :

$Is^+(X)$  : sans point fixe: les translations, les vissages qui sont la composée d'une rotation  $r$  autour d'un axe  $D$  de direction  $Ker(L_f - Id_V)$  et d'une translation  $\tau_{\vec{u}}$  de vecteur  $\vec{u} \in Ker(L_f - Id_V) \setminus \{\vec{0}\}$ ; avec point fixe: les rotations autour d'un axe,

$Is^-(X)$  : avec point fixe: les réflexions affines, les composées d'une réflexion affine  $s$  et d'une rotation  $r$  d'axe  $D$  de direction  $Ker(L_s + Id_V)$ ; sans point fixe: les réflexions (ou symétries) glissées.

## 8- Notion d'angle

*Préambule:* Si  $(V, (|))$  est un espace vectoriel euclidien, l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|(u | v)| \leq \|u\| \|v\|$$

montre qu'il existe un unique  $\theta \in [0, \pi]$  tel que

$$\cos(\theta) = \frac{(u | v)}{\|u\| \|v\|}$$

Le réel  $\theta$  est communément appelé *angle non orienté* des vecteurs  $u$  et  $v$ .

Lorsque  $\dim(V) = 2$ , on peut définir une notion d' *angle orienté* intimement liée au groupe (commutatif en dimension 2) des rotations  $O^+(V)$  :

### Angles orientés dans le plan euclidien

**Lemme:** Soient  $u, v \in V$  de norme 1. Il existe une unique rotation  $f \in O^+(V)$  telle que  $f(u) = v$ .

**Démo:** Complétons  $u$  en une base orthonormée  $(u, \bar{u})$ . Dans cette base la matrice de toute rotation  $f$  s'écrit  $[f] = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ , avec  $a^2 + b^2 = 1$ . Dès lors la condition  $v = f(u) = au + b\bar{u}$  détermine  $f$ .

Soit  $\hat{A} = \{(u, v) \mid \|u\| = 1 = \|v\|\}$  l'ensemble des couples de vecteurs unitaires de  $V$ .

On définit une relation d'équivalence sur  $\hat{A}$  en déclarant que  $(u, v) \sim (u', v')$  ssi il existe une rotation  $r \in O^+(V)$  telle que  $r(u) = u'$  et  $r(v) = v'$  et on appelle *angle orienté* de vecteurs

toute classe d'équivalence  $[u, v]$  pour cette relation. On notera  $A = \hat{A} / \sim$  l'ensemble des angles orientés.

*Remarque:* Cete définition reflète l'idée intuitive que les couples  $(u, v)$  et  $(r(u), r(v))$  définissent bien le même angle.

Par le lemme, on a une application  $\hat{\phi} : \hat{A} \rightarrow O^+(V)$  qui au couple  $(u, v)$  associe l'unique rotation  $f$  telle que  $f(u) = v$ . Cette application est surjective puisque quel que soit  $u$  unitaire,  $\hat{\phi}(u, f(u)) = f$ , ce qui montre aussi qu'elle n'est pas injective.

**Lemme:**  $\hat{\phi}(u, v) = \hat{\phi}(u', v')$  ssi  $(u, v) \sim (u', v')$ .

**Démo:** Supposons qu'il existe  $f \in O^+(V)$  telle que  $f(u) = v$  et  $f(u') = v'$  et soit  $r \in O^+(V)$  l'unique rotation telle  $r(u) = u'$ . On a  $f(r(u)) = f(u') = v'$ . D'autre part, puisque  $O^+(V)$  est commutatif en dimension 2, on a aussi  $v' = f(r(u)) = r(f(u)) = r(v)$ , i.e.  $(u', v') = (r(u), r(v))$ .

La réciproque est identique: si  $r \in O^+(V)$  est telle que  $(r(u), r(v)) = (u', v')$  alors pour l'unique rotation  $f$  telle que  $v = f(u)$ , on a  $v' = r(v) = r(f(u)) = f(r(u)) = f(u')$ , i.e.  $\hat{\phi}(u, v) = \hat{\phi}(u', v')$ .

Ce lemme implique que  $\hat{\phi}$  passe au quotient i.e. induit une application

$$\phi : A \rightarrow O^+(V) : [u, v] \mapsto f.$$

$\phi$  est une bijection de réciproque  $f \mapsto [w, f(w)]$  où  $w \in V$  est un vecteur unitaire arbitraire.

### Les angles orientés forment un groupe.

On définit l'addition  $+$  :  $A \times A \rightarrow A$  en transportant la composition  $\circ$  de  $O^+(V)$  sur  $A$  au moyen de la bijection  $\phi$  :

$$[u, v] + [u', v'] = \phi^{-1}(\phi[u, v] \circ \phi[u', v'])$$

En clair: Si  $u, u', u'' \in V$  sont unitaires

$$[u, f(u)] + [u', f'(u')] = [u'', (f \circ f')(u'')].$$

On sait (cf Chapitre 1) que  $(A, +)$  est un groupe commutatif (puisque  $(O^+(V), \circ)$  l'est). Le neutre pour  $+$  est l'angle nul  $[u, u]$ . On appelle angle *plat* l'angle  $[u, -u]$ ; on a  $[u, -u] + [u, -u] = [u, (-Id_V \circ -Id_V)(u)] = [u, u]$ . Un angle  $[u, v]$  tel que  $2[u, v]$  soit plat est appelé *angle droit*.

*Relation de Chasles:* Quels que soient  $u, v, w \in V$  unitaires,  $[u, v] + [v, w] = [u, w]$ .



*Remarque:* Il est important de remarquer que la notion d'angle a été introduite sans utiliser de *mesure* d'un angle, i.e. sans attacher un nombre réel à une classe  $[u, v]$ . C'est ce qu'on se propose de faire à présent:

### Orientation et mesure d'un angle orienté.

Choisissons une orientation, i.e. une base orthonormée  $\mathcal{A} = (a_1, a_2)$  de  $V$ . Observer que la matrice d'une rotation  $f \in O^+(V)$  est indépendante du choix de la base orthonormée dans la classe de  $\mathcal{A}$ : En effet, si  $\mathcal{A}'$  est une base orthonormée directe

$$[f, \mathcal{A}', \mathcal{A}'] = [Id_V, \mathcal{A}, \mathcal{A}'] [f, \mathcal{A}, \mathcal{A}] [Id_V, \mathcal{A}', \mathcal{A}]$$

Et chacune de ces matrices appartient à  $O_2^+$  qui est commutatif, dès lors

$$[f, \mathcal{A}', \mathcal{A}'] = [Id_V, \mathcal{A}, \mathcal{A}'] [Id_V, \mathcal{A}', \mathcal{A}] [f, \mathcal{A}, \mathcal{A}] = [f, \mathcal{A}, \mathcal{A}].$$

On a donc une bijection de  $A$  sur  $O_2^+$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\rightarrow O^+(V) \rightarrow O_2^+ \\ [u, f(u)] &\mapsto f \mapsto [f] = [f, \mathcal{A}, \mathcal{A}] \end{aligned}$$

qui est indépendante du choix de la base orthonormée dans une orientation donnée.

On appelle *mesure* de  $[u, f(u)]$  tout réel  $\theta$  tel que  $[f] = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ .

Si  $\theta$  est une mesure de  $[u, f(u)]$ , l'ensemble des mesures de  $[u, f(u)]$  est  $\theta + 2\pi\mathbf{Z}$ .

0 est une mesure de l'angle nul  $[u, u]$ ,  $\pi$  est une mesure de l'angle plat  $[u, -u]$ ,  $\frac{\pi}{2}$  et  $-\frac{\pi}{2}$  sont des mesures d'un angle droit. Si  $\theta$  est une mesure de  $[u, v]$ ,  $-\theta$  est une mesure de  $[v, u]$ .

On appelle *angle géométrique* l'angle obtenu en *oubliant* de distinguer  $[u, v]$  et  $[v, u]$  et *mesure de l'angle géométrique* l'unique réel  $\theta \in [0, \pi]$  tel que  $\theta$  soit une mesure de  $[u, v]$  ou de  $[v, u]$ . Ce  $\theta$  est ce que mesure un rapporteur.

Remarquer que la mesure de l'angle géométrique coïncide avec l'angle non orienté du préambule.

### Un diagramme de groupes

Soit  $S^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$  le cercle unité de  $\mathbf{C} \simeq \mathbf{R}^2$ . Pour rappel  $S^1 \subset \mathbf{C}^*$  est un sous-groupe pour la multiplication complexe. Il est facile de vérifier que l'application  $S^1 \rightarrow O_2^+ : a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  est un isomorphisme de groupes.

Par ailleurs, l'application

$$\mathbf{R} \rightarrow S^1 : \theta \mapsto \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

est un morphisme surjectif de groupes de noyau  $2\pi\mathbf{Z}$ . Dès lors, elle induit un isomorphisme de groupes:

$$\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \rightarrow S^1 : \theta + 2\pi\mathbf{Z} \mapsto \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

Ici,  $(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}, +)$  est le groupe quotient i.e. l'espace quotient pour la relation d'équivalence sur  $\mathbf{R}$  définie par  $x \sim x'$  ssi  $x - x' \in 2\pi\mathbf{Z}$  muni de l'addition  $(\theta + 2\pi\mathbf{Z}) + (\theta' + 2\pi\mathbf{Z}) = (\theta + \theta') + 2\pi\mathbf{Z}$ . On a donc la suite d'isomorphismes:

$$\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \rightarrow S^1 \rightarrow O_2^+ \rightarrow A$$

où la dernière flèche est la réciproque de  $\phi$ .

### Quelques propriétés des angles.

(1) Les réflexions vectorielles renversent les angles orientés i.e. pour toute paire  $u, v$  de vecteurs unitaires,

$$[s(u), s(v)] = [v, u].$$

**Démo:** Soit  $s'$  la réflexion de droite fixe  $\langle u - v \rangle^\perp$ . On a  $s'(u) = v$  et dès lors  $s'(v) = u$ . Puisque  $s \circ s' \in O^+(V)$  on a  $[v, u] = [s \circ s'(v), s \circ s'(u)] = [s(u), s(v)]$ .

(2) Pour trois points distincts  $A, B, C$  la somme

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] + [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}] + [\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}]$$

est un angle plat.

La démo utilise  $[u, v] = [-u, -v]$  car en dimension 2,  $-Id_V \in O^+(V)$  et la relation de Chasles pour les angles.

(3) (*Angles inscrits*) Si  $A, B, C$  sont trois points distincts d'un cercle de centre  $O$ , on a

$$[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = 2[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}]$$

### Similitudes

Soit  $(V, (\cdot|\cdot))$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n$  et  $f : V \rightarrow V$  une application linéaire.

$f$  est une similitude s'il existe un réel  $k > 0$  appelé le rapport de la similitude tel que quel que soit  $u \in V$ ,  $\|f(u)\| = k \|u\|$ .

Les similitudes vectorielles forment un groupe pour la composition.

**Proposition:** Soit  $f$  une similitude vectorielle de rapport  $k > 0$  et  $h_k$  l'homothétie  $h_k = k Id_V$ . Il existe une unique isométrie  $g \in O(V)$  tel que  $f = h_k \circ g$ .

**Démo:** Il suffit de poser  $g = h_{\frac{1}{k}} \circ f$ .

Une similitude est dite *directe* si  $Det(f) > 0$  et *indirecte* si  $Det(f) < 0$ .

Soit  $(X, V)$  un espace affine euclidien et  $f : X \rightarrow X$  une application affine.  $f$  est appelée une similitude affine de rapport  $k > 0$  si  $L_f$  est une similitude vectorielle.

On dira qu'une similitude affine est directe (indirecte) si  $L_f$  est directe (indirecte).

**Propriétés:**

(1) Supposons  $dim(X) = 2$ . Les similitudes affines directes conservent les angles orientés de vecteurs.

**Démo:** Il faut montrer que quels que soient  $A, B, C \in X$  on a

$$\left[ \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}, \frac{\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|} \right] = \left[ \frac{\overrightarrow{f(A)f(B)}}{\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\|}, \frac{\overrightarrow{f(A)f(C)}}{\|\overrightarrow{f(A)f(C)}\|} \right]$$

Ceci résulte immédiatement de la définition d'une similitude directe.

(2) Plus généralement, si  $dim(X) = n$ , les similitudes conservent les angles non orientés ou géométriques.

(3) Supposons  $dim(X) = 2$ . Soit  $A, B, A', B' \in X$  avec  $A \neq B$  et  $A' \neq B'$ . Alors il existe une unique similitude affine directe telle que  $f(A) = A'$  et  $f(B) = B'$ .

**Démo:** La condition  $L_f(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$  montre que le rapport  $k = \frac{\|\overrightarrow{A'B'}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$  et  $L_f = (kId_V) \circ l$  où  $l \in O^+(V)$  est l'unique rotation telle que  $l\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right) = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\|\overrightarrow{A'B'}\|}$  ce qui détermine  $L_f$  univoquement et donc  $f$  puisque  $f(A) = A'$ .