CHAPITRE III

Pour rappel (cf Chapitre 1), un polyèdre convexe d'un espace affine (euclidien) X est une partie $P \subset X$ qui est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés

$$P = \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(\mathbf{R}_{\geq 0})$$

où pour chaque i de l'ensemble fini I, $f_i : X \to \mathbf{R}$ est une application affine non constante.

Un *Polytope* de X est un polyèdre convexe, compact, d'intérieur non vide. En dimension 2 un polytope est appelé un *polygone*.

On se propose dans ce chapitre d'esquisser la classification des *polytopes réguliers* en dimension 2 et 3.

Polygones réguliers

Soit P un polygone du plan affine euclidien $\mathbf{R}^2$ ayant l sommets $S_1, S_2, \ldots, S_l$ (pour faire court soit P un $l-$ gone).

P est dit *régulier* si tous ses côtés ont la même longueur a et tous ses angles géométriques ont la même mesure θ, par exemple:

Lemme Si P est un $l-$ gone de $\mathbf{R}^2$, la somme des mesures de ses angles géométriques vaut $(l-2)\pi$. Dès lors si P est régulier, la mesure commune de ces angles vaut $\theta = \frac{l-2}{l}\,\pi$.

Démo: Choisir un sommet S de P et décomposer P en $l-2$ triangles comme dans la figure (Une telle décomposition est appelée une triangulation de P.) et observer que pour chaque triangle la somme des mesures des angles vaut π.

Proposition Quel que soit l'entier $l \geq 3$ il existe un $l-$gone régulier de $\mathbf{R}^2$. Deux $l-$gones réguliers sont semblables.

Démo: Pour l'existence, il suffit de prendre le $l-$ gone P dont les sommets sont les racines $l-$ ième de l'unité dans $\mathbf{C} \simeq \mathbf{R}^2$.

Soit maintenant deux $l-$ gones réguliers P et P' de sommets respectifs $S_1, \ldots, S_l$ et $S'_1, \ldots, S'_l$ et de longueur de côtés respective a et a'. On veut montrer qu'il existe une similitude affine $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ telle que $f(S_i) = S'_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, l\}$. Pour ce faire, considérer l'unique similitude affine f telle que $f(S_1) = S'_1$ et $f(S_2) = S'_2$. L'ensemble $f(P)$ est un $l-$gone régulier de longueur de côtés a' et de mesure d'angles $\frac{l-2}{l}\pi$ entièrement situé dans l'un des deux demi-espaces définis par la droite $< S'_1, S'_2 >$.

S'il est situé dans le même demi-espace que P', l'égalité des longueurs et des angles donne $f(P) = P'$. Sinon, soit s la réflexion affine de droite fixe $< S'_1, S'_2 >$. La similitude affine $s \circ f$ envoie alors P sur P'.

Polytopes réguliers en dimension 3.

Soient $P \subset \mathbf{R}^3$ un polytope, S le nombre de ses sommets, A le nombre de ses arêtes et F le nombre de ses faces.

Théorème d'Euler

$$S - A + F = 2$$

Démo: On a

$$P = \bigcap_{1 \leq i \leq F} f_i^{-1}(\mathbf{R}_{\geq 0})$$

Choisir une face de P, par exemple $F_1 \subset f_1^{-1}(0)$, et un point a de $\mathbf{R}^3 \setminus P$ tel que a n'appartienne à aucun des plans $f_i^{-1}(0), 1 \leq i \leq F$. Enfin choisir un plan Π parallèle à la face F_1, comme dans la figure

Considérer l'application

$$f : P \to \Pi : p \mapsto p'$$

où p' est l'unique point d'intersection de la droite $< a, p >$ avec le plan Π. L'application f établit une bijection entre les sommets, les arêtes et les faces de P autres que F_1 et un ensemble de points, de segments et de polygones convexes du plan Π. Pour le cube:

Pour obtenir la formule d'Euler, on va sommer les mesures des angles géométriques des polygones de $f(P) \subset \Pi$ de deux manières différentes.

Soit n_k le nombre de $k-$ gones de $f(P)$ autres que $f(F_1)$. Puisque chaque face de P correspond à un polygone de $f(P)$, on a $\sum_k n_k = F - 1$. Pour le cube:

Puisque la somme des angles d'un $k-$ gone est $(k-2)\pi$, la somme Σ des angles des polygones de $f(P)$ exceptés ceux de $f(F_1)$ vaut

$$\Sigma = \sum_k n_k(k-2)\pi = \pi \sum_k k\, n_k - 2\pi(F-1) \qquad (\star)$$

Pour le cube:

Par ailleurs, on peut calculer Σ en considérant que les S_1 sommets extérieurs (ceux de

$f(F_1))$ contribuent $(S_1-2)\pi$ et les $(S-S_1)$ sommets intérieurs de $f(P)$ contribuent chacun 2π i.e.

$$\Sigma = 2\pi(S-S_1)+\pi(S_1-2) = \pi(2S-S_1-2) \qquad (\star\star)$$

Pour le cube:

Il reste à évaluer $\sum_k k\,n_k$. C'est le nombre d'arêtes projetées comptées avec multiplicités: les arêtes intérieures sont comptées deux fois et les arêtes extérieures (celles de $f(F_1)$) sont comptées une seule fois. Comme chaque face a autant d'arêtes que de sommets, on a

$$\sum_k k\,n_k = 2(A-S_1)+S_1 = 2A-S_1$$

Pour le cube:

En comparant $(\star)$ et $(\star\star)$ il vient $S-A+F=2$.

Corollaire: Soit $f,s\in\mathbf{N}$. Supposons que le polytope P soit tel que (1) chaque sommet de P porte f arêtes, (2) chaque face a s sommets. Alors $s,f\in\{3,4,5\}$ et (f,s,A,F,S) peut prendre cinq valeurs distinctes.

Démo: *Quelques remarques préalables:*
(1) Toute face a au moins trois sommets i.e. $s\geq 3$.

(2) Chaque sommet porte au moins trois arêtes i.e. $f\geq 3$.

(3) Chaque face a s sommets donc s arêtes et chaque arêtes appartient à deux faces: $2A=sF$.

(4) Chaque sommet porte f arêtes et chaque arête a deux sommets: $fS=2A$.

Passons à la preuve: La formule d'Euler et les remarques (3) et (4) donnent la relation

$$\frac{2A}{f}-A+\frac{2A}{s}=2$$

qui est équivalente à

$$\frac{1}{f}+\frac{1}{s}=\frac{1}{A}+\frac{1}{2}.$$

Comme A est un nombre fini il vient $\frac{1}{f}+\frac{1}{s}>\frac{1}{2}$ et dès lors (cf remarques (1) et (2)) $f<6$ et $s<6$. D'où $s,f\in\{3,4,5\}$.
Si $f\geq 4$ on a $\frac{1}{s}>\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$ i.e. $s<4$. Le même argument donne $s\geq 4\Rightarrow f<4$. Dès lors

$$(f,s)\in\{(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(5,3)\}.$$

Pour chacune des valeurs de (f,s), $F=\frac{2A}{s}$, $S=\frac{2A}{f}$ et la formule d'Euler déterminent A,F,S.

Il y a donc cinq valeurs de (f,s,A,F,S):

f	s	A	F	S
3	3	6	4	4
3	4	12	6	8
3	5	30	12	20
4	3	12	8	6
5	3	30	20	12

Polytopes réguliers
Le polytope $P\subset\mathbf{R}^3$ est dit régulier de type (f,s) si

(1) toutes ses faces sont des $s-$gones réguliers isométriques, i.e. chaque face est une copie du même $s-$ gone régulier.

(2) chaque sommet appartient à f faces, i.e. porte f arêtes.

Par ce qui précède, un tel polytope régulier peut-être assembler d'au plus cinq manières combinatoires distinctes.

Théorème (Les cinq polytopes réguliers de $\mathbf{R}^3$)
Pour chacune des valeurs de (f,s,A,F,S) du tableau qui précède il existe un polytope régulier P constitué de F polygones réguliers à s côtés qui sont assemblés de manière à ce que chacun de ses S sommets appartienne à f faces.
Deux polytopes réguliers de même type combinatoire sont semblables.

Démo: Pour l'existence, il suffit de les construire (voir figures ci-après). Quant à la nomenclature, Il s'agit dans l'ordre du tableau, du tétraèdre régulier (assemblage de 4 triangles équilatéraux), de l'hexaèdre régulier i.e. du cube, du dodécaèdre régulier (assemblage de 12 pentagones réguliers), de l'octaèdre régulier (assemblage de 8 triangles équilatéraux) et enfin de l'icosaèdre (assemblage de 20 triangles équilatéraux).

Nous ne ferons pas ici la preuve de l'unicité de ces polytopes à similitude près.

Construction des polytopes réguliers

Il est facile de construire un cube C et ensuite en choisissant quatre sommets équidistants de C, d'y inscrire un tétraèdre régulier T :

L'octaèdre régulier $C_\star$ est l'enveloppe convexe des centres des faces du cube C :

Une méthode de construction du dodécaèdre régulier D consiste à observer que l'on peut assembler douze faces pentagonales sur les sommets d'un cube C

Enfin voici une figure de l'icosaèdre régulier $D_\star$

Remarque: l'icosaèdre régulier peut être réalisé comme enveloppe convexe des centres des faces du dodécaèdre.
Le lecteur intéressé par toutes ces questions pourra consulter l'excellente référence

- *Géométrie 3/convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes - de Marcel Berger. Ed. Nathan*

Il y trouvera notamment une autre (même plusieurs) définition(s) équivalente(s) de la régularité d'un polytope.

Pour conclure voici une application plus *ludique* de la formule d'Euler.

Le ballon de Foot

Un ballon de foot est un polytope de $\mathbf{R}^3$ constitué de faces pentagonales et hexagonales régulières assemblées de telle manière à ce que chaque sommet appartienne à 3 faces.

Combien faut-il de pentagones pour confectionner un ballon?

Soient p le nombre de pentagones, h le nombre d'hexagones et S, A, F comme dans la formule d'Euler.
Puisque chaque sommets appartient à 3 faces

$$3S = 5p + 6h$$

Puisque chaque arête appartient à 2 faces et chaque face a autant d'aretes que de sommets

$$2A = 5p + 6h$$

La formule d'Euler $S - A + F = 2$ appliquée au ballon s'écrit donc

$$\frac{5p+6h}{3} - \frac{5p+6h}{2} + p + h = 2$$

i.e.

$$p = 12.$$

Voici un ballon de foot dessiné par Leonard de Vinci (extrait du livre de Marcel Berger cité plus haut)