

ISTIL, Tronc commun de première année

Introduction aux méthodes probabilistes et statistiques, 2008 – 2009

Contrôle continu du 6 octobre 2008

Autorisées : une feuille recto-verso manuscrite originale, calculatrice

exercice 1 : On dispose des notes obtenues par 26 élèves de classes préparatoires aux grandes écoles lors d'un concours. Les notes d'une épreuve d'algèbre et d'une épreuve d'analyse sont listées ci-dessous.

algèbre	1.0	5.3	6.3	6.5	6.6	6.8	7.1	7.3	7.9	8.2	8.2	8.7	9.9
analyse	7	6.9	6.7	6.7	8.3	6.8	7.9	6.5	7.7	7.7	6.5	8	8.6
algèbre	9.9	10.3	10.3	11.2	11.3	11.6	11.7	12.3	12.3	12.4	12.4	12.8	14.2
analyse	11.8	11.1	9.1	10.4	10.2	11.9	10.7	11.8	10.9	13.8	14	13.2	11.4

- 1) Tracer l'histogramme des notes d'algèbre avec les classes $[0, 5[$, $[5, 8[$, $[8, 10[$, $[10, 12[$, $[12, 15[$.
- 2) Donner le résumé numérique de cette série statistique (en définissant précisément chaque quantité calculée).
- 3) Tracer et commenter soigneusement le boxplot des notes d'algèbre, ainsi que celui des notes d'analyse.
- 4) Effectuer une régression linéaire pour expliquer les notes d'algèbre en fonction des notes d'analyse. Tracer le nuage de points et la droite des moindres carrés. Que pensez-vous de ce modèle ?

exercice 2 : Soit une expérience aléatoire modélisée par un univers Ω et une probabilité P . Soient A , B et C trois événements tels que $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.2$ et $P(C) = 0.3$. De plus, A et B sont indépendants, et B et C sont incompatibles.

- a) Calculer $P(A \cup B)$.
- b) Calculer $P(B \cup C)$.
- c) Que vaut $P(B|C^c)$.
- d) Quelle est la probabilité pour que, à la fois, B et C soient réalisés.
- e) Quelle est la probabilité pour que les trois événements aient lieu.

exercice 3 : On lance deux dés qu'on supposera honnêtes.

- 1) Décrire tous les résultats possibles de cette expérience. Puis attribuer une probabilité à chacun de ces événements élémentaires.
- 2) Soient A l'événement "la somme des dés est 6", B l'événement "la somme des dés est 7", C l'événement "la somme des dés est impaire", D l'événement "les deux dés donnent le même chiffre". Quels éléments composent chacun de ces événements ?
- 3) Calculer la probabilité des événements A , B , C et D .

exercice 4 : On prélève des échantillons dans une population constituée de boules blanches (en nombre N_B) et de boules rouges (en nombre N_R) placées dans une urne.

1) On pioche une boule, on note sa couleur et on la replace dans l'urne avant d'en retirer une seconde, la replacer puis tirer une troisième. Ainsi, on tire un échantillon de taille 3 avec remise. Modéliser l'expérience et calculer la probabilité de chaque résultat possible.

2) Soit D l'événement "on a au moins une boule blanche dans l'échantillon". Quelle est la probabilité de D ?

3) Soit E l'événement "on a exactement une boule blanche dans l'échantillon". Quelle est la probabilité de E ?

4) On tire un échantillon de taille 3 sans remise (on pioche trois boules). Modéliser l'expérience et calculer la probabilité de chaque résultat possible.

5) Pour l'échantillon sans remise, quelle est la probabilité de D , celle de E ?

6) Comparer les quatre probabilités obtenues dans les cas suivants :

- une population de taille petite : une urne contenant 7 boules blanches (B) et 3 boules rouges (R),

- une population de grande taille : une urne contenant 7000 boules blanches (B) et 3000 boules rouges (R).

exercice 5 : Soit X variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Détailler le calcul qui fournit $E[X] = np$.