ISTIL, Tronc commun de première année

Introduction aux méthodes probabilistes et statistiques, 2008 – 2009

Examen du 19 décembre 2008

Autorisées : une feuille recto-verso manuscrite originale, calculatrice. Durée : 2 heures

exercice 1 : On s'intéresse au PH des pluies dans les régions de montagne, en France. Nous savons que ce PH est une variable aléatoire, notée X, de loi normale $\mathcal{N}(5.6, 0.4)$.

1) Donner la densité de la loi de X. Tracer cette fonction.

2) Calculer $P[X \geq 5.6]$, $P[5 \leq X \leq 6]$.

3) Déterminer u et v tels que $P[X \leq u] = 0.25$ et $P[X \leq v] = 0.75$.

4) Soit $X_1, ..., X_n$ un grand échantillon de la loi de X, c'est-à-dire n variables aléatoires indépendantes, de même loi que X. Soit $\overline{X}_n$ la moyenne empirique. Quelle est la loi de $\overline{X}_n$?

exercice 2 : On étudie maintenant le PH des pluies du sud de la Pologne. Nous savons que ce PH suit encore une loi normale, dont on ignore les paramètres. On prélève 30 échantillons de pluies provenant du sud de la Pologne. On mesure le PH de ces échantillons et on note cette série statistique $(y_i)_{1 \leq i \leq 30}$:

4.60,	4.79,	4.81,	4.82,	4.86,	4.89,	5.03,	5.06,	5.10,	5.14
5.17,	5.18,	5.28,	5.28,	5.32,	5.44,	5.45,	5.55,	5.62,	5.63
5.64,	5.70,	5.77,	5.79,	5.81,	5.82,	5.83,	5.85,	5.97,	6.32

1) Faire un histogramme de ces données avec les bornes des classes 4.6, 5.00, 5.50, 6.00, 6.40.

2) Après avoir défini toutes les grandeurs, calculer le résumé numérique : moyenne empirique, écart-type empirique, médiane, quartiles.

3) Tracer le boxplot.

4) Donner un intervalle de confiance de niveau de confiance 95% pour la moyenne du PH des pluies du sud de la Pologne (cette moyenne est inconnue).

5) Tester si ces pluies sont plus acides (c'est l'hypothèse alternative) que les pluies des montagnes françaises en utilisant les données de l'exercice 1. Calculer la p-valeur.

exercice 3 :

On dispose d'une pièce de monnaie "virtuelle" (elle ne donne pas PILE ou FACE avec probabilité 1/2). Notons p la probabilité pour qu'elle donne PILE. On la lance 3 fois.

1) Proposer un espace fondamental Ω et une probabilité P sur Ω pour modéliser cette expérience aléatoire.

2) Soit X le nombre de PILE obtenus à l'issue de ces trois lancers. Cette v.a. suit une loi bien connue. Laquelle ? (justifier)

On considère maintenant 3 pièces de monnaie, dont la première donne PILE avec probabilité 0.1, la seconde avec probabilité 0.4 et le troisième avec probabilité 0.6. On choisit une de ces pièces au hasard et on la lance trois fois.

3) Proposer un espace Ω.

4) Sachant qu'on a obtenu 2 fois PILE et 1 fois FACE, calculer la probabilité pour qu'on ait joué avec la première pièce. On pourra utiliser les événements A_i : "on joue avec la i-ème pièce" (i=1,2,3) et B : "on obtient 2 fois PILE et 1 fois FACE".

Question subsidiaire :

Une v.a. Y a sa loi qui vérifie

$$P[Y = n+1] = \frac{4}{n+1} P[Y = n], \text{ pour } n \geq 0$$

De quelle loi s'agit-il ?