

ISTIL, Tronc commun de première année

Introduction aux méthodes probabilistes et statistiques, 2008 – 2009

Examen du 28 janvier 2009 (deuxième session). Durée : 1h30

exercice 1 : Aux États-Unis, dans les années 20, on a mesuré la distance de freinage (en pieds) en fonction de la vitesse (en miles par heure) pour les modèles courants d'automobiles. Voici les 25 données :

vitesse	4	7	8	10	10	11	12	12	13	13	14	14	15	16
distance	2	4	16	18	34	28	20	28	34	46	36	80	26	32
vitesse	17	17	18	18	19	20	20	20	23	24	24			
distance	32	50	56	84	46	32	52	64	54	92	120			

- 1) Tracer l'histogramme des distances avec les classes $[0, 20[$, $[20, 40[$, $[40, 60[$, $[60, 100[$, $[100, 120]$.
- 2) Donner le résumé numérique des distances (en définissant précisément chaque quantité calculée).
- 3) Tracer et commenter le boxplot des distances.
- 4) Effectuer une régression linéaire pour expliquer la distance de freinage en fonction de la vitesse. Tracer rapidement le nuage de points et la droite des moindres carrés. Que pensez-vous de ce modèle ?

exercice 2 : On s'intéresse au nouveau loto de la Française des Jeux. On ne s'intéresse qu'aux gagnants de rang 1 (les 5 bons numéros + le bon "numéro chance"). Ces gagnants de rang 1 se partagent à chaque tirage une cagnotte de 2 millions €.

Notons p la probabilité d'être un gagnant de rang 1 (c'est-à-dire d'avoir les 5 bons numéros + le bon numéro chance). Soit $n = 4.000.000$ le nombre de joueurs qui tentent leur chance à chaque tirage.

- 1) Observons un tirage : on tire 5 numéros pris entre 1 et 49, puis on tire un numéro entre 1 et 10 (le "numéro chance"). Modéliser l'expérience en décrivant un espace Ω et en donnant la probabilité de chaque événement élémentaire.
- 2) Quelle est la probabilité p pour qu'un joueur ayant rempli une grille et choisi un numéro chance, soit un gagnant de rang 1 ?
- 3) Quelle est la loi du nombre X de gagnants de rang 1 pour un tirage ? (justifiez soigneusement). Proposer une loi qui approchera la loi de X ? Calculer $P[X = 0]$, $P[X = 1]$, $P[X = 2]$.
- 4) Quelle est l'espérance de X ?
- 5) Si on n'a pas de gagnant de rang 1 à l'issue d'un tirage, la cagnotte est reportée au tirage suivant. Déterminer la loi du nombre de report, ou plus précisément la loi du nombre Y de tirages consécutifs jusqu'à observer un gagnant de rang 1. Calculer la probabilité pour qu'on attende plus de k tirages pour observer un gagnant. Application numérique avec $k = 10$, $k = 34$.
- 6) La Française des Jeux organise 3 tirages par semaine. Est-ce qu'il est possible d'imaginer qu'une personne gagne deux fois la cagnotte dans sa vie ? Proposer une modélisation de ce problème.