

ISTIL, Tronc commun de première année

Introduction aux méthodes probabilistes et statistiques, 2008 – 2009

TD 2. Le modèle probabiliste

À chaque fois que c'est possible, vous devez décrire complètement le modèle que vous utilisez : l'univers Ω et la probabilité P .

Exercice 1 – Proposer un univers Ω pour les expériences aléatoires suivantes et dénombrer les résultats possibles :

- 1) On lance un dé.
- 2) On lance 2 dés.
- 3) On tire trois cartes dans un jeu .
- 4) On place les 5 lettres qui forment “proba” au hasard sur une réglette de Scrabble.
- 5) On place les 6 lettres qui forment “erreur” au hasard sur une réglette de Scrabble.

Exercice 2 – Soit P une probabilité sur un ensemble Ω et deux événements A et B . On suppose que

$$P(A \cup B) = 7/8, \quad P(A \cap B) = 1/4, \quad P(A) = 3/8.$$

Calculer $P(B)$, $P(A \setminus B)$, $P(B \setminus A)$.

Exercice 3 – Supposons que les faces d'un dé sont truquées de telle manière que les numéros impairs ont chacun la même chance d'apparaître, chance qui est deux fois plus grande que pour chacun des numéros pairs. On jette le dé. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 4 ?

Exercice 4 – Un parking contient douze places alignées. Huit voitures s'y sont garées au hasard, et l'on observe que les quatre places libres se suivent. Est-ce surprenant ?

Exercice 5 — Deux chauffeurs de bus se relaient sur la même ligne. Lors d'une grève, le premier a 60% de chances de faire grève et le second 80%. Pendant la prochaine grève, quelle est la probabilité pour qu'un seul des deux chauffeurs fasse grève ?

Exercice 6 — La probabilité qu'un objet fabriqué à la chaîne ait un défaut est de 0,01. Trouver la probabilité que, dans un lot de 100 objets, il y ait au moins un objet défectueux. Quelle est la probabilité qu'il y ait, dans un tel lot, exactement un objet défectueux ?

Exercice 7 – Soient M_1 , M_2 , M_3 trois personnes. La première M_1 dispose d'une information codée sous forme + ou -. Elle la transmet à la deuxième personne M_2 . Puis M_2 la transmet à M_3 . Malheureusement, à chaque fois que l'information est transmise, il y a une probabilité p que l'information soit changée en son contraire. En tenant compte du fait que deux changements rétablissent la vérité, quelle est la probabilité pour que M_3 ait le bon message ?

Et si M_3 transmet l'information dont il dispose à une quatrième personne M_4 , quelle est la probabilité pour que M_4 ait la bonne information ?

Lorsque $p = 0.2$, quelle est la valeur numérique de cette probabilité ?

Exercice 8 — Un nouveau vaccin a été testé sur 12500 personnes ; 75 d'entre elles, dont 35 femmes enceintes, ont eu des réactions secondaires nécessitant une hospitalisation. Parmi les 12500 personnes testées, 680 personnes sont des femmes enceintes.

1. Quelle est la probabilité pour une femme enceinte, d'avoir une réaction secondaire si elle reçoit un vaccin ?
2. Quelle est la probabilité pour une personne non enceinte, d'avoir une réaction secondaire ?

Exercice 9 — Dans une usine, la machine A fabrique 60% des pièces, dont 2% sont défectueuses.

La machine B fabrique 30% des pièces, dont 3% sont défectueuses.

La machine C fabrique 10% des pièces, dont 4% sont défectueuses.

1. On tire une pièce au hasard dans la fabrication. Quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?
2. On tire une pièce au hasard dans la fabrication. Elle est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine A ? par la machine B ? par la machine C ?

Exercice 10 — Dans une jardinerie : 25% des plantes ont moins d'un an, 60% ont de 1 à 2 ans, 25% ont des fleurs jaunes, 60% ont des fleurs roses, 15% ont des fleurs jaunes et moins d'un an, 3% ont plus de 2 ans et n'ont ni fleurs jaunes, ni fleurs roses. 15% de celles qui ont de 1 à 2 ans, ont des fleurs jaunes, 15% de celles qui ont de 1 à 2 ans, n'ont ni fleurs jaunes ni fleurs roses. On suppose que les fleurs ne peuvent pas être à la fois jaunes et roses.

On choisit une plante au hasard dans cette jardinerie.

1. Quelle est la probabilité qu'elle ait moins d'un an et des fleurs roses ?
2. Quelle est la probabilité qu'elle ait des fleurs roses, sachant qu'elle a plus de 2 ans ?
3. Quelle est la probabilité qu'elle ait plus de deux ans et des fleurs jaunes ?

Exercice 11 — Une boîte contient 7 pièces détachées dont 2 en aluminium et 5 en cuivre. Une autre boîte contient 3 pièces en aluminium et 2 en cuivre. On choisit l'une des boîtes au hasard. On tire une pièce de cette boîte et on la met dans l'autre boîte. Puis on tire une pièce de la seconde boîte. Calculer la probabilité pour que les deux pièces tirées soient du même métal.