

### TD 4. La loi normale

**Exercice 1** – Montrer que si  $X$  est une variable aléatoire de loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ , alors la variable aléatoire  $Z = \frac{1}{\sigma}(X - \mu)$  suit une loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

**Exercice 2** – Soit  $X$  une variable aléatoire de loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Calculer  $P[X \leq 1.62]$ ,  $P[X \geq -0.52]$ ,  $P[-1 < X < 1]$ . Trouver  $u$  tel que  $P[X \leq u] = 0.334$ .

**Exercice 3** – La largeur (en cm) d'une fente dans une pièce fabriquée en aluminium est distribuée selon une loi normale de paramètres  $\mu = 2$  et  $\sigma = 0,012$ . Les limites de tolérance sont données comme étant  $2,000 \pm 0,012$ . Quel sera le pourcentage de pièces défectueuses ?

**Exercice 4** – Soit  $X$  une variable aléatoire gaussienne. On sait que :

$$P[X \leq 3] = 0,5517 \quad \text{et} \quad P[X \geq 7] = 0,0166$$

Déterminer la moyenne et l'écart-type de  $X$ .

**Exercice 5** – Dans une usine d'emballage, un automate remplit des paquets de café de 250g. On sait que l'automate verse en fait une quantité de café variable, régie par une loi normale de moyenne réglable et d'écart-type 3. Quelle doit être la moyenne théorique choisie pour que 90% des clients achètent bien au moins 250g de café ?

**Exercice 6** – Dans ce problème, les durées des trajets sont supposées de loi normale.

- 1) Un directeur de société habite dans la ville A. Il part de chez lui à 8h45 et se rend en voiture à son bureau qui ouvre à 9h. La durée de son trajet est, en moyenne, de 13 minutes, avec un écart-type de 3 minutes. Quelle est la probabilité que le directeur arrive en retard ?
- 2) La secrétaire du directeur habite en A, elle va au bureau avec le train de 8h32 ; elle descend à la station B. Elle prend ensuite le bus qui part de B à 8h50 (sans attendre le train), pour aller de B à son bureau. La durée du trajet en train a pour moyenne 16 minutes, pour écart-type 2 minutes, et la durée du trajet en bus a pour moyenne 9 minutes et pour écart-type 1 minute. Les durées de trajet en train et en bus sont indépendantes. Quelle est la probabilité que la secrétaire arrive à l'heure ?
- 3) Quelle est la probabilité pour que le directeur ou la secrétaire (c'est-à-dire l'un au moins des deux) arrive à l'heure, les durées des trajets du directeur ou de la secrétaire étant supposés indépendantes ?

**Exercice 7** – Une enquête marketing a eu pour but de vérifier si les cibles potentielles seraient tentées par un nouveau produit. Il a été montré que 56% des gens sont favorables au nouveau produit. Pour aller plus loin, on interroge à nouveau 200 personnes. Quelle est la loi du nombre de clients potentiels parmi les 200 ? Par quelle loi peut-on l'approcher ? Calculer  $P[X > 100]$  et  $P[100 \leq X \leq 150]$ .

On souhaite maintenant demander des précisions à un grand nombre de personnes favorables au produit, mettons 100 personnes. Déterminer la taille de l'échantillon de personnes à interroger pour que notre échantillon contienne au moins 100 personnes favorables, avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

**Exercice 8** – On prélève indépendamment et avec remise  $n$  individus d'une population séparée en deux sous-populations  $A$  et  $A^c$  de proportions respectives  $p$  et  $1 - p$  (clients importants ou petits clients par exemple).

1. Soit  $K$  le nombre d'individus de la sous-population  $A$  présents dans l'échantillon. Quelle est la loi de  $K$  ?
2. Notons  $F = K/n$  la fréquence empirique de la catégorie  $A$ . Donner l'espérance et la variance de  $F$ .
3. Quel est le comportement de  $F$  quand  $n$  devient grand ?
4. On considère un échantillon de 400 clients d'un organisme de placement financier. Les clients de cet organisme, dans leur ensemble, se répartissent ainsi : 20% possèdent de gros portefeuilles, les autres ne détenant que des portefeuilles modestes. Quelle est la probabilité que la proportion  $F$  de gros clients dans l'échantillon soit comprise entre 7% et 23% ? Quelle est la probabilité pour que  $F$  soit inférieure à 15% ? Dans l'agence de Lyon (qui compte 400 clients), seuls 15% des clients sont de gros clients. Est-ce acceptable par le siège ?

**Exercice 9** – Soit  $X$  une v.a. de loi exponentielle  $\mathcal{E}(1)$ . Calculer  $P[X \leq 2]$  et  $P[X > 0.5]$ . Déterminer la densité de  $Y = 3X$ . De quelle loi s'agit-il ?