Université Claude Bernard Lyon 1 DEUG MMP
1996-1997

Module M06-P2 - Epreuve d'Algèbre

Session 2 - Durée 1h30
Lundi 23 Juin 1997

Les calculettes et les documents sont interdits.

Questions de cours

1. Enoncer le théorème de Cayley-Hamilton.
Quel est le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire.
Soit A une matrice telle que $A^3 = I$. Montrer que si λ est valeur propre de A, alors $\lambda^3 = 1$.
Si A d'ordre 3 et les valeurs propres sont j, j^2, j^3, que peut-on dire de A^3 ? de A ?

2. Quel est le polynôme minimal des matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Enoncer le théorème de décomposition d'un endomorphisme sous forme de Jordan.

4. Formule de Cauchy-Schwartz. Démonstration.

5. Soit f une fonction linéaire sur $\mathbb{R}^n$. Supposant $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire, exprimer la distance de $y = (y_1, \ldots, y_n)$ à $f^{-1}(0)$.

6. Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer e^{tC}. Exprimer e^{tA} lorsque A est une matrice nilpotente.

Exercice 1

Soit (S) le système différentiel ci-dessous, dans lequel x,y et z sont des fonctions dérivables de la variable t.
$$\begin{cases} x' &= 3x + 2y - 3z + 4t - 1 \\ y' &= 4x + 10y - 12z \\ z' &= 3x + 6y - 7y + t \end{cases}$$
Ecrire ce système sous forme matricielle. Décomposer sous forme de Jordan l'endomorphisme associé.
Déterminer la solution générale du système homogène associé.
Déterminer une solution particulière de (S).

Exercice 2

Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par :
$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_2x_3 - 2x_3x_1 - 6x_1x_2$$

1. Pourquoi Q est-elle une forme quadratique ?
2. Quelle est sa forme polaire σ_Q ? Donner la matrice de σ_Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Décomposer Q en somme et différence de carrés de formes linéaires indépendantes.
4. Quelle est la signature de Q ? Enoncer la loi d'inertie de Sylvester.
5. Ecrire la matrice des formes obtenues en 3 par rapport à la base duale de $\mathbb{R}^3$. Trouver une base orthogonale pour σ_Q.