Université Claude Bernard Lyon 1 — DEUG MASS
1998-1999

Module M06 - Epreuve d'Algèbre-Analyse des données 1

Session 1 - Durée 1h30
Lundi 11 Janvier 1999

L'utilisation de calculatrices et de documents de toute nature n'est pas autorisée.

Questions de cours

1. Soit Q un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
   (a) Inégalité de Cauchy-Schwartz. Démonstration.
   (b) Montrer que toute famille orthogonale est libre.

2. Soit Ω un ensemble fini à n éléments, muni de la pondération uniforme. Soient $x = (x-1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux éléments de $\mathbb{R}^\Omega$. Calculer leurs moyennes, variances, covariance et coefficient de corrélation.

Exercice 1

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et soient u_1, u_2, u_3 les trois éléments de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$u_1 = e_1 \quad , \quad u_2 = e_2 \quad , \quad u_3 = e_1 + e_2 + e_3$$

1. Dire pourquoi (u_1, u_2, u_3) est une base.
   Ecrire les matrices de changement de base.
2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Calculer la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3). Qu'observez-vous ?
3. Calculer A^n, $n \geq 1$.

Exercice 2

Soit $Q : \mathbb{R}^{\nVDash} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3$$

1. Pourquoi Q est une forme quadratique ?
2. Quelle est la forme polaire σ_Q ? Quelle est la matrice de σ_Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$? Quel est son rang ?
3. Montrer que Q définit un produit scalaire.
4. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour ce produit scalaire.
5. Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (1, 2, 3)$ et $v_2 = (3, 2, 1)$. Déterminer la projection orthogonale $\widehat{x}$ de $x = (x_1, x_2, x_3)$ sur W.
   Qu'observez-vous si $x = (1, 1, 2)$? Quelle est dans ce cas la distance de x à W ?
   Ecrire la matrice de l'application qui à x associe $\widehat{x}$.