

## Module M08 - Epreuve d'Algèbre-Analyse des données 2

Session 1 - Durée 1h30  
Lundi 10 Janvier 2000

*L'utilisation de calculatrices et de documents de toute nature n'est pas autorisée.*

---

### Questions de cours

1. (a) Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur  $\mathbb{C}$ . Donner les définitions du polynôme caractéristique et du polynôme minimal de  $f$ . Calculez-les si  $n = 4$  et une matrice de  $f$  est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{respectivement} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (b) Donner la définition des sous-espaces caractéristiques; donner leurs dimensions. Calculer-les si une matrice de  $f$  est

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (c) Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton.

Montrer que le polynôme caractéristique et le polynôme minimal ont les mêmes racines.

Supposant que  $f^2 - f - Id_E = 0$ , quelles peuvent-être les valeurs propres de  $f$ ?

2. Donner un critère pour qu'un endomorphisme soit nilpotent, ce au moyen du polynôme caractéristique; au moyen du polynôme minimal.
3. Soient  $x$  et  $y$  deux variables statistiques définies sur un ensemble  $\Omega$ . Exprimer la moyenne de  $xy$  et la variance de  $x + y$  lorsque la covariance de  $x$  et  $y$  est nulle. Justifier.

---

### Exercice 1

Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$ .

- Déterminer les valeurs propres.
- Déterminer les sous-espaces propres. En déduire que  $A$  n'est pas diagonalisable.
- Écrire la matrice de Jordan  $J$ .
- Déterminer le sous-espace caractéristique associé à la plus grande valeur propre.
- Écrire une matrice de changement de base. Calculer son inverse.
- Calculer le polynôme minimal de  $A$ .

---

### Exercice 2

Soient  $u = (1, 2, 3)$  et  $v(3, 2, 1)$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . L'espace  $\mathbb{R}^3$  étant muni du produit scalaire ordinaire, déterminer la projection orthogonale d'un vecteur  $x = (x_1, x_2, x_3)$  sur le vecteur  $u$ . Déterminer la projection  $p_H(x)$  de  $x$  sur le sous-espace vectoriel  $H$  engendré par les vecteurs  $u$  et  $v$ . Écrire la matrice de  $p_H$  (l'espace  $\mathbb{R}^3$  étant rapporté à la base canonique).