Université Claude Bernard Lyon 1 DEUG MASS
1998-1999

Module M08 - Epreuve d'Algèbre-Analyse des données 2

Session 1 - Durée 1h30
Mardi 25 Mai 1999

L'utilisation de calculatrices et de documents de toute nature n'est pas autorisée.

Questions de cours

1. Soit f un endomorphisme de E espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{C}$. Donner les définitions du polynôme caractéristique et du polynôme minimal de f. Calculez-les si $n = 4$ et une matrice de f est
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{respectivement} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Donner la définition des sous-espaces caractéristiques ; donner leurs dimensions. Calculer-les si une matrice de f est
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Enoncer le théorème de Cayley-Hamilton.

4. Enoncer la caractérisation des endomorphismes nilpotents au moyen de leur polynôme caractéristique et de leur polynôme minimal. Prouvez-la.

5. Montrer que les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont réelles. Donner un exemple de matrice symétrique à coefficients complexes qui n'est pas diagonalisable.

6. Soient x, y deux variables statistiques définies sur un ensemble fini Ω. Exprimer la moyenne de xy et la variance de $x + y$ lorsque la covariance de x et y est nulle. Justifiez.

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -8 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres.
2. Déterminer les sous-espaces propres. En déduire que A n'est pas diagonalisable.
3. Ecrire la matrice de Jordan J.
4. Déterminer le sous-espace caractéristique associé à la plus grande valeur propre.
5. Ecrire une matrice de changement de base. Calculer son inverse.
6. Calculer le polynôme minimal de A.

Exercice 2

Soit $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ une famille de n vecteurs d'un espace euclidien E. On désigne par $G(b_1, \ldots, b_n)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le terme général est $< b_i, b_j >$.

1. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les $b_1, \ldots b_n$ soient linéairement indépendants est
$$\det G(b_1, \ldots, b_n) \neq 0$$
On suppose dans la suite que les $b_1, \ldots, b_n$ sont linéairement indépendants et on désigne par B le sous-espace vectoriel de E engendré par $b_1, \ldots, b_n$.
2. Montrer que $\det G(b_1, \ldots, b_n) > 0$.
3. Soit $x \in E \backslash B$.
   (a) Montrer que la projection orthogonale $\widehat{x}$ de x sur B s'exprimer sous la forme $\widehat{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$ où $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est solution du système linéaire suivant :
   $$G(b_1, \ldots, b_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < x, b_1 > \\ < x, b_2 > \\ \vdots \\ < x, b_n > \end{pmatrix}$$
   (b) Déduire des calculs précédents :
   $$\|x - \widehat{x}\|^2 = d(x, B)^2 = \frac{\det G(b_1, \ldots, b_n, x)}{\det G(b_1, \ldots, b_n)}$$
   (c) On suppose $E = \mathbb{R}^3$, $b_1 = (1, 2, 1)$, $b_2 = (2, 1, 2)$, $x = (1, 4, 1)$. Calculer $d(x, B)$. Déterminer l'orthogonal de B. Soit $a \in E$ tel que $\{a\}^{\perp} = B$ et $y \in E$. Donner l'expression de $d(y, B)$ en fonction de y et a.
   Retrouver la valeur $d(x, B)$ déjà obtenue.