Université Claude Bernard Lyon 1 DEUG MASS
1999-2000

# UE 41 - Epreuve d'Algèbre

Contôle Continu - Durée 1h30
Mercredi 3 Mai 2000

*Les calculatrices et les documents sont interdits*

---

$\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels et $E$ l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^4$ muni de la base canonique $(e) = (e_i)_{1 \le i \le 4}$.

Soit $f$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans la base $(e)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -4 & 0 & 9 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -12 & 6 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique $\chi_f$ de $f$ et en déduire les valeurs propres de $f$.
2. Déterminer le polynôme minimal $\mu_f$ de $f$.
3. Déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de $f$ et préciser les dimensions respectives de ces sous-espaces propres.
4. On pose

$$\varepsilon_1 = 2e_1 + e_2 - 2e_4 \quad , \quad \varepsilon_2 = e_3 \quad , \quad \varepsilon_3 = -e_1 - 2e_2 \quad , \quad \varepsilon_4 = e_1 - e_4$$

   (a) Prouver que $(\varepsilon) = (\varepsilon_i)_{1 \le i \le 4}$ est une base de $E$.

   (b) Calculer $f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), f(\varepsilon_3)$ et $f(\varepsilon_4)$ dans la base $(\varepsilon)$.

   (c) En déduire les bases des sous-espaces propres et des sous-espaces caractéristiques (ou spectraux) associés aux valeurs propres de $f$. Préciser les relations qui lient ces sous-espaces dans $E$.

   (d) Déterminer la matrice $J$ de $f$ dans la base $(\varepsilon)$.