UE 41 - Epreuve d'Algèbre

Session 1 - Durée 2h00
Mardi 30 Mai 2000

L'utilisation de calculatrices et de documents de toute nature n'est pas autorisée.

Questions de cours

1. Démontrer que toute forme linéaire f sur $\mathbb{R}^n$ est de la forme

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n \quad \text{où } a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$$

2. Soit f un endomorphisme de E espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{C}$. Donner les définitions du polynôme caractéristique et du polynôme minimal de f. Calculez-les si $n = 4$ et une matrice de f est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{respectivement} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Donner la définition des sous-espaces caractéristiques ; donner leurs dimensions. Calculer-les si une matrice de f est

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Enoncer le théorème de Cayley-Hamilton. Montrer que le polynôme caractéristique et le polynôme minimal ont les mêmes racines.
5. Enoncer la caractérisation des endomorphismes nilpotents au moyen de leur polynôme caractéristique et de leur polynôme minimal. Prouvez-la.
6. Montrer que les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont réelles. Donner un exemple de matrice symétrique à coefficients complexes qui n'est pas diagonalisable.
7. Soit φ une forme bilinéaire sur E, espace de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Montrer que $y \in \mathrm{Ker}\varphi$ si et seulement si $\varphi(x, y) = 0$ pour tout $x \in E$.
8. Soit $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4$$

   (a) Pourquoi Q est-elle une forme quadratique ?
   (b) Quelle est sa forme polaire σ_Q ? Quelle est la matrice de σ_Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$?

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & -3 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A a deux valeurs propres entières.
2. Déterminer les sous-espaces propres. En déduire que A n'est pas diagonalisable.
3. Ecrire la matrice de Jordan J.
4. Déterminer le sous-espace caractéristique associé à la plus petite valeur propre.
5. Ecrire une matrice de changement de base. Calculer son inverse.
6. Calculer le polynôme minimal de A.